EREMIA GEORGESCU-BUZĂU
EUGEN ONOFRAŞ

METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE MATEMATICĂ ÎN LICEU

EREMIA GEORGESCU-BUZĂU
EUGEN ONOFRAŞ

METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE MATEMATICĂ ÎN LICEU



EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ, BUCUREŞTI, 1983

PREFAȚA

Pentru viitorul matematician sau pentru cel care, pregătindu-se pentru alte domenii de activitate, dorește să utilizeze cunoștințele de matematică drept mijloc de investigație, perioada de formare presupune, printre altele, rezolvarea a cît mai multe probleme.

Evident, stabilirea capitolelor din care trebuie să se lucreze, ordinea în care acestea trebuie parcurse, indicarea celor mai reprezentative probleme (avem în vedere partea teoretică la care se face apel pentru rezolvare) din fiecare capitol, cît și asigurarea numărului minim de probleme ce trebuie rezolvate sînt sarcini care revin celor care dirijează activitatea de pregătire.

In metematică, ca și în celelalte științe, nu există chei universale, motiv pentru care prin „metode de rezolvare a problemelor" nu se poate înțelege prezentarea unui rețetar absolut, care să asigure soluționarea tuturor problemelor de matematică pe baza unor formule cunoscute sau algoritmi prestabiliți. Lucrarea de față se referă numai la unele capitole din matematica de liceu, autorii intenționînd, pe baza experienței lor didactice, să prezinte :

— probleme reprezentative din fiecare capitol, care să asigure aplicarea a cît mai multe din cunoștințele incluse în capitolul respectiv ;

— metodele de rezolvare pentru problemele respective ;

— posibilități de generalizare a acestor metode la varietăți mai largi de probleme.

Pentru rezolvarea problemelor prezentate, se face apel la cunoștințele de matematică însușite în învățămîntul liceal. În cazurile în care se fac referiri și la cunoștințe care nu sînt incluse în programele de liceu, se dau informațiile teoretice necesare.

Capitolele I, II și III sînt prezentate de lector universitar Eremia Georgescu-Buzău, capitolele IV și V sînt prezentate de profesor Eugen Onofraș.

AUTORII

CAPITOLUL I

ELEMENTE DE LOGICĂ

§ 1. PROPOZIŢII. OPERAŢII CU PROPOZIŢII

În acest paragraf presupunem cunoscută noţiunea de *propoziţie* (manualul de algebră pentru clasa a IX-a). O propoziţie p poate fi *adevărată* şi în acest caz spunem că are valoarea de adevăr 1 sau *falsă* şi în acest caz spunem că are valoarea de adevăr 0.

1. **Negaţia** propoziţiei p va fi notată cu oricare din simbolurile următoare $\bar{p}$, $\neg p$, non p. Între p şi $\bar{p}$ există următoarea corespondenţă:

p	$\bar{p}$
1	0
0	1

2. **Disjuncţia.** Propoziţia „p sau q" poartă numele de *disjuncţia* între propoziţia p şi propoziţia q şi se notează cu „$p \vee q$".

Propoziţia „$p \vee q$" este adevărată dacă cel puţin una dintre propoziţiile p şi q este adevărată şi falsă, dacă ambele propoziţii sînt false.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

3. **Conjuncţia.** Propoziţia „p şi q" poartă numele de *conjuncţia* între propoziţia p şi propoziţia q şi se notează cu „$p \wedge q$".

Propoziţia $p \wedge q$ este adevărată dacă ambele propoziţii p şi q sînt adevărate şi falsă în celelalte cazuri.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

4. **Implicaţia.** Propoziţia „dacă p, atunci q" poartă numele de *implicaţie* avînd ca ipoteză (premisă) propoziţia p şi concluzie propoziţia q şi se notează cu „$p \rightarrow q$".

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
0	1	1
0	0	1
1	0	0

5. **Echivalenţa logică.** Propoziţia „dacă p, atunci q şi dacă q atunci p" poartă numele de *echivalenţa logică* între propoziţiile p şi q şi se notează cu „$p \longleftrightarrow q$" sau „$p \equiv q$". Propoziţia $p \longleftrightarrow q$ este adevărată dacă propoziţiile p şi q au aceeaşi valoare de adevăr şi este falsă dacă propoziţiile p şi q au valorile de adevăr diferite.

Dacă propoziţia $p \longleftrightarrow q$ este adevărată se spune că propoziţiile p şi q sînt echivalente.

p	q	$p \longleftrightarrow q$
1	1	1
0	0	1
1	0	0
0	1	0

Pentru rezolvarea problemelor din acest paragraf sînt utile următoarele *propoziții adevărate*. Se va nota cu f, respectiv a. o propoziție falsă, respectiv adevărată.

P_1. $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	P'_1. $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
P_2. $p \vee q \equiv q \vee p$	P'_2. $p \wedge q \equiv q \wedge p$
P_3. $p \vee p \equiv p$	P'_3. $p \wedge p \equiv p$
P_4. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$	P'_4. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
P_5. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	P'_5. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
P_6. $p \vee f \equiv p$	P'_6. $p \wedge f \equiv f$
P_7. $p \vee a \equiv a$	P'_7. $p \wedge a \equiv p$
P_8. $p \vee \bar{p} \equiv a$	P'_8. $p \wedge \bar{p} \equiv f$
P_9. $\overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$	P'_9. $\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$

P_{10}. $\bar{\bar{p}} \equiv p$

Justificarea acestor proprietăți se face cu tabele de adevăr. Vom da ca model demonstrațiile propozițiilor P_6, P_7, P'_5 și P_9.

Demonstrația proprietăților P_6 *și* P_7

p	f	$p \vee f$
1	0	1
0	0	0

p	a	$p \vee a$
1	1	1
0	1	1

Se observă că propozițiile p și $p \vee f$, respectiv propozițiile a și $p \vee a$ au aceeași valoare de adevăr și deci sînt echivalente.

Demonstrația proprietății P'_5

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Se observă că propozițiile $p \wedge (q \vee r)$ și $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ au aceeași valoare de adevăr și deci sînt echivalente.

Demonstrația proprietății P_9

p	q	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

Se observă că propozițiile $\overline{p \vee q}$ și $\bar{p} \wedge \bar{q}$ au aceeași valoare de adevăr și deci sînt echivalente.

Celelalte demonstrații le propunem ca exerciții cititorilor.

§ 2. CÎTEVA PROPRIETĂȚI UZUALE PRIVIND CALCULUL CU PROPOZIȚII

P_{11}. *Reducerea implicației la disjuncție și negație. Următoarea propoziție este adevărată :*
$(p \rightarrow q) \equiv (\bar{p} \vee q)$. Demonstrația se face cu tabel de adevăr după modelul precedent.

P_{12}. *Următoarea propoziție este adevărată :*
$(p \leftrightarrow q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$. Demonstrația se face cu tabel de adevăr.

P_{13}. *Următoarea propoziție este adevărată :*

$$(p \leftrightarrow q) \equiv (\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee p).$$

Demonstrația rezultă din aplicarea proprietăților P_{11} și P_{12}.

P_{14}. *Următoarele propoziții sînt adevărate :*

a) $(p \rightarrow q) \equiv (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$

b) $(p \leftrightarrow q) \equiv (\bar{q} \leftrightarrow \bar{p})$.

Justificarea se face cu ajutorul tabelelor de adevăr.

§ 3. EXERCIȚII PRIVIND CALCULUL CU PROPOZIȚII

1. *Să se arate că :*

a) $p \vee q \vee \bar{p} \equiv a$;

b) $\overline{(p \vee q)} \wedge p \equiv f$;

c) $\overline{(p \vee q)} \wedge \bar{p} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$.

Soluție. a) Avem:

$$
\begin{aligned}
& p \vee q \vee \bar{p} \equiv \\
& \equiv (p \vee \bar{p}) \vee q \equiv && \text{(Propozițiile } P_1 \text{ și } P_2\text{)} \\
& \equiv a \vee q \equiv && \text{(Propoziția } P_8\text{)} \\
& \equiv a && \text{(Propoziția } P_7\text{).}
\end{aligned}
$$

b) Avem:

$$
\begin{aligned}
& \overline{(p \vee q)} \wedge p \equiv \\
& \equiv (\bar{p} \wedge \bar{q}) \wedge p \equiv && \text{(Propoziția } P_9\text{)} \\
& \equiv (p \wedge \bar{p}) \wedge \bar{q} \equiv && \text{(Propozițiile } P_1' \text{ și } P_2'\text{)} \\
& \equiv f \wedge \bar{q} \equiv && \text{(Propoziția } P_8'\text{)} \\
& \equiv f && \text{(Propoziția } P_6'\text{).}
\end{aligned}
$$

c) Avem:

$$
\begin{aligned}
& \overline{(p \vee q)} \wedge \bar{p} \equiv \\
& \equiv \bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{p} \equiv && \text{(Propoziția } P_9\text{)} \\
& \equiv \bar{p} \wedge \bar{p} \wedge \bar{q} \equiv && \text{(Propozițiile } P_1' \text{ și } P_2'\text{)} \\
& \equiv \bar{p} \wedge \bar{q} && \text{(Propoziția } P_3'\text{).}
\end{aligned}
$$

2. *Să se scrie cu ajutorul negației, disjuncției și conjuncției propozițiile:*

a) $\overline{(p \rightarrow q)} \wedge (p \wedge q)$

b) $\overline{(p \leftrightarrow q)} \wedge (\bar{p} \wedge \bar{q})$

Soluție. a) Avem:

$$
\begin{aligned}
& \overline{(p \rightarrow q)} \wedge (p \wedge q) \equiv \\
& \equiv \overline{(\bar{p} \vee q)} \wedge (p \wedge q) \equiv && \text{(Propoziția } P_{11}\text{)} \\
& \equiv \bar{\bar{p}} \wedge \bar{q} \wedge p \wedge q \equiv && \text{(Propoziția } P_9\text{)} \\
& \equiv p \wedge \bar{q} \wedge p \wedge q \equiv && \text{(Propoziția } P_{10}\text{)} \\
& \equiv (p \wedge p) \wedge (q \wedge \bar{q}) \equiv && \text{(Propozițiile } P_1' \text{ și } P_2'\text{)} \\
& \equiv p \wedge f \equiv && \text{(Propozițiile } P_3' \text{ și } P_8'\text{)} \\
& \equiv f && \text{(Propoziția } P_6'\text{),}
\end{aligned}
$$

b) Avem

$$
\begin{aligned}
& \overline{(p \leftrightarrow q)} \wedge (\bar{p} \wedge \bar{q}) \equiv \\
& \equiv \overline{(\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee p)} \wedge (\bar{p} \wedge \bar{q}) \equiv && \text{(Propoziția } P_{13}\text{)} \\
& \equiv (\overline{\bar{p} \vee q} \vee \overline{\bar{q} \vee p}) \wedge (\bar{p} \wedge \bar{q}) \equiv && \text{(Propoziția } P_9\text{)}
\end{aligned}
$$

$$\equiv [(\bar{\bar{p}} \wedge \bar{q}) \vee (\bar{\bar{q}} \wedge \bar{p})] \wedge (\bar{p} \wedge \bar{q}) \equiv \qquad \text{(Propoziţia } P_9)$$
$$\equiv [(p \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge \bar{p})] \wedge (\bar{p} \wedge \bar{q}) \equiv \qquad \text{(Propoziţia } P_{10})$$
$$\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee \bar{p}) \wedge (\bar{q} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee \bar{p}) \wedge (\bar{p} \wedge \bar{q}) \equiv \qquad \text{(Propoziţia } P_5)$$
$$\equiv (p \vee q) \wedge a \wedge a \wedge (\bar{q} \vee \bar{p}) \wedge (\bar{p} \wedge \bar{q}) \equiv \qquad \text{(Propoziţia } P_8)$$
$$\equiv (p \vee q) \wedge (\bar{q} \vee \bar{p}) \wedge (\bar{p} \wedge \bar{q}) \qquad \text{(Propoziţia } P'_7).$$



§ 4. PREDICATE. OPERAŢII CU PREDICATE. PROPOZIŢII UNIVERSALE. PROPOZIŢII EXISTENŢIALE

Definiţia 1. *O funcţie $p : M \to L$ unde M este o mulţime nevidă şi L mulţimea propoziţiilor se numeşte predicat peste mulţimea M.* Rezultă că oricare ar fi $x \in M$, $p(x)$ este o propoziţie (adevărată sau falsă).

Definiţia 2. *Fie $p : M \to L$ un predicat. Predicatul $\bar{p}$ care face ca fiecărui $x \in M$ să-i corespundă propoziţia $\bar{p}(x)$ poartă numele de negaţia predicatului p. Se mai notează cu non p, sau $\neg p$.*

Definiţia 3. *Fie $p : M \to L$ şi $q : M \to L$ două predicate.*

a) *Predicatul $p \vee q : M \to L$ definit prin relaţia $(p \vee q)(x) = p(x) \vee q(x)$ poartă numele de disjuncţia dintre predicatul p şi predicatul q.*

b) *Predicatul $p \wedge q : M \to L$ definit prin relaţia $(p \wedge q)(x) = p(x) \wedge q(x)$ poartă numele de conjuncţia dintre predicatul p şi predicatul q.*

c) *Predicatul $p \to q : M \to L$ definit prin relaţia $(p \to q)(x) = p(x) \to q(x)$ poartă numele de implicaţie avînd ca ipoteză (premiză) predicatul p şi concluzie predicatul q.*

d) *Predicatul $p \leftrightarrow q : M \to L$ definit prin relaţia $(p \leftrightarrow q)(x) = p(x) \leftrightarrow q(x)$ se numeşte echivalenţa logică între predicatul p şi predicatul q.*

Definiţia 4. *Fie $p : M \to L$ un predicat.*

a) *Propoziţia „Pentru orice $x \in M$ propoziţia $p(x)$ este adevărată" poartă numele de propoziţie universală şi se notează cu simbolul $(\forall_x)(p(x))$.*

Simbolul $\forall$ se citeşte „oricare" şi se numeşte *cuantificator universal.*

b) *Propoziţia „Există $x \in M$, astfel încît propoziţia $p(x)$ este adevărată" poartă numele de propoziţie existenţială şi se notează cu simbolul $(\exists x)(p(x))$.*

Simbolul $\exists$ se citeşte „există" şi se numeşte *cuantificator existenţial.*

Fie : $p : M \to L$ şi $q : M \to L$ două predicate.

Propoziţia $(\forall x)(p(x) \to q(x))$ va fi notată astfel :

$$p(x) \Rightarrow q(x).$$

Implicația $p(x) \Rightarrow q(x)$ este adevărată dacă pentru orice x pentru care $p(x)$ este adevărată, avem $q(x)$ adevărată (în celelalte cazuri ipoteza $p(x)$ este falsă și deci implicația este adevărată).

Propoziția $(\forall x)(p(x) \longleftrightarrow q(x))$ va fi notată astfel:

$$p(x) \Leftrightarrow q(x)$$

Următoarele propoziții sînt echivalente:

a) $p(x) \Leftrightarrow q(x)$.

b) $p(x) \Rightarrow q(x)$ și $q(x) \Rightarrow p(x)$.

c) $p(x)$ și $q(x)$ sînt simultan adevărate, respectiv simultan false.

§ 5. TRANSCRIEREA PROPRIETĂȚILOR $P_1, \ldots, P_9$, $P'_1, \ldots, P'_0$, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14}, din § 1 și § 2 ÎN CAZUL PREDICATELOR

Fie predicatele $p: M \to L$, $q: M \to L$, $r: M \to L$, $f: M \to L$ și $a: M \to L$, unde propoziția $f(x)$ este falsă pentru orice $x \in M$, iar $a(x)$ este adevărată pentru orice $x \in M$.

Următoarele propoziții sînt adevărate.

P_1. $[p(x) \vee q(x)] \vee r(x) \Leftrightarrow \Leftrightarrow p(x) \vee [q(x) \vee r(x)]$.	P'_1. $[p(x) \wedge q(x)] \wedge r(x) \Leftrightarrow \Leftrightarrow p(x) \wedge [q(x) \wedge r(x)]$.
P_2. $p(x) \vee q(x) \Leftrightarrow q(x) \vee p(x)$.	P'_2. $p(x) \wedge q(x) \Leftrightarrow q(x)p(x)$.
P_3. $p(x) \vee p(x) \Leftrightarrow p(x)$.	P'_3. $p(x) \wedge p(x) \Leftrightarrow p(x)$.
P_4. $p(x) \vee [p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow p(x)$.	P'_4. $p(x) \wedge [p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow p(x)$.
P_5. $p(x) \vee q(x) \wedge r(x)] \Leftrightarrow \Leftrightarrow [p(x) \vee q(x)] \wedge [p(x) \vee r(x)]$.	P'_5. $p(x) \wedge [q(x) \wedge r(x)] \Leftrightarrow \Leftrightarrow [p(x) \wedge q(x)] \vee [p(x) \wedge r(x)]$.
P_6. $p(x) \vee f(x) \Leftrightarrow p(x)$.	P'_6. $p(x) \wedge f(x) \Leftrightarrow f(x)$.
P_7. $p(x) \vee a(x) \Leftrightarrow a(x)$.	P'_7. $p(x) \wedge a(x) \Leftrightarrow p(x)$.
P_8. $p(x) \vee \overline{p}(x) \Leftrightarrow a(x)$.	P'_8. $p(x) \wedge \overline{p}(x) \Leftrightarrow f(x)$.
P_9. $\overline{p(x) \vee q(x)} \Leftrightarrow \overline{p(x)} \wedge \overline{q(x)}$.	P'_9. $\overline{p(x) \wedge q(x)} \Leftrightarrow \overline{p(x)} \vee \overline{q(x)}$.

P_{10}. $\overline{\overline{p}}(x) \Leftrightarrow p(x)$.

P_{11}. $(p(x) \to q(x)) \Leftrightarrow (\overline{p}(x) \vee q(x))$.

P_{12}. $(p(x) \longleftrightarrow q(x)) \Leftrightarrow (p(x) \to q(x)) \wedge (q(x) \to q(x))$.

P_{13}. $(p(x)) \longleftrightarrow q(x)) \Leftrightarrow (\overline{p}(x) \vee q(x)) \wedge ((\overline{q}x) \vee p(x))$.

P_{14}. a) $(p(x) \to q(x)) \Leftrightarrow (\overline{q}(x) \to \overline{p}(x))$.

b) $(p(x) \longleftrightarrow q(x)) \Leftrightarrow (\overline{q}(x) \longleftrightarrow \overline{p}(x))$.

Reamintim că simbolul $\Leftrightarrow$ se utilizează pentru notarea unor propoziţii universale. De exemplu: proprietatea P_4, trebuie interpretată ca propoziţia $(\forall x)[(p(x) \vee (p(x) \wedge q(x)) \longleftrightarrow p(x)]$.

§ 6. PROPOZIŢII CUANTIFICATE. EXERCIŢII

O propoziţie scrisă cu ajutorul simbolurilor $\forall, \exists, \vee, \wedge, \rightarrow, \longleftrightarrow$ se spune că este scrisă cuantificat. Precizăm că în scrierea cuantificată nu se trec mulţimile din care fac parte variabilele.

Exerciţii

I. *Să se precizeze care dintre propoziţiile următoare este adevărată sau falsă şi să se scrie cuantificat.*

Fie $x \in \mathbf{R}$ şi $y \in \mathbf{R}$ şi următoarele propoziţii:

1. *Oricare ar fi* $x \in \mathbf{R}$, *avem* $x^2 - 4x + 5 > 0$.
Propoziţia este adevărată căci $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 > 0$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Scriere cuantificată: $(\forall x)(x^2 - 4x + 5 > 0)$.

2. *Există* $x \in \mathbf{R}$, *astfel încît* $x^2 - 3x + 2 = 0$.
Propoziţia este adevărată căci dacă $x = 1$, avem $1^2 - 3 + 2 = 0$.
Scriere cuantificată: $(\exists x)(x^2 - 3x + 2 = 0)$.

3. *Oricare ar fi* $x \in \mathbf{R}$ *avem* $x^2 - 3x + 4 < 0$.
Propoziţia este falsă căci pentru $x = 0$, avem $4 > 0$.
Scrierea cuantificată: $(\forall x)(x^2 - 3x + 4 < 0)$.

4. *Există* $x \in \mathbf{R}$, *astfel încît* $x^2 + x + 1 = 0$.
Propoziţia este falsă căci ecuaţia $x^2 + x + 1 = 0$ nu are rădăcini reale.
Scrierea cuantificată: $(\exists x)(x^2 + x + 1 = 0)$.

5. a) *Oricare ar fi* $x \in \mathbf{R}$, *există* $y \in \mathbf{R}$, *astfel încît* $x + y = 2$.
b) *Există* $x \in \mathbf{R}$, *astfel încît oricare ar fi* $y \in \mathbf{R}$, *avem* $x + y = 2$.
a) Propoziţia este adevărată căci pentru orice $x \in \mathbf{R}$, există $y \in \mathbf{R}$ şi anume $y = 2 - x$ care verifică ecuaţia $x + y = 2$.
Scrierea cuantificată: $(\forall x)(\exists y)(x + y = 2)$.
b) Propoziţia este falsă căci nu există $x \in \mathbf{R}$, astfel încît egalitatea $x + y = 2$ să fie adevărată pentru orice y.
Scrierea cuantificată: $(\exists x)(\forall y)(x + y = 2)$.

Observaţie. Exerciţiul 5 pune în evidenţă faptul că nu este permisă permutarea cuantificatorilor $\forall$ şi $\exists$.

II. 6. *Fie* $f : A \rightarrow B$ *o funcţie. Să se scrie cuantificat propoziţiile:*
a) *Oricare ar fi* $x_1 \in A$ *şi oricare ar fi* $x_2 \in A$, *astfel încît* $x_1 \neq x_2$, *avem* $f(x_1) \neq f(x_2)$ (definiţia funcţiei *injective*; manualul de algebră pentru clasa a IX-a).

b) *Oricare ar fi $y \in B$, există $x \in A$ astfel încît $y = f(x)$* (definiția funcției *surjective*; manualul de algebră pentru clasa a IX-a).

a) $\forall(x_1, x_2)(x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2))$ sau $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

b) $(\forall y)(\exists x)(y = f(x))$.

7. *Fie $f: A \to B$ o funcție numerică și $I \subseteq A$. Să se cuantifice următoarea propoziție:*

Oricare ar fi $x_1 \in I$ și $x_2 \in I$, astfel încît $x_1 \leqslant x_2$, avem $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. (definiția funcției crescătoare, manualul de algebră pentru clasa a IX-a).

Scrierea cuantificată:

$\forall(x_1, x_2)(x_1 \leqslant x_2 \to f(x_1) \leqslant f(x_2))$ sau $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

8. *Fie următoarele variabile: $n \in \mathbf{N}$, $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, $(a_n)_{n \in N}$ șir de numere reale, $a \in \mathbf{R}$, $M \in \mathbf{R}$. Să se scrie cuantificat următoarele propoziții:*

a) *Există $a \in \mathbf{R}$, astfel încît oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, astfel încît oricare ar fi $n > N(\varepsilon)$, avem $| a_n - a | < \varepsilon$* (definiția cu ε a convergenței, manualul de analiză pentru clasa a XI-a).

b) *Există $M \in \mathbf{R}$, astfel încît oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$ avem $| a_n | < M$* (definiția șirului mărginit, manualul de analiză pentru clasa a XI-a).

a) $(\exists a)(\forall \varepsilon)(\exists N_{(\varepsilon)})(\forall n)(n > N(\varepsilon) \to | a_n - a | < \varepsilon)$.

b) $(\exists M)(\forall n)(| a_n | < M)$.

9. *Fie $\mathcal{V}_a$ mulțimea vecinătăților punctului $a \in \mathbf{R}$. Spunem că șirul $(a_n)_{n \in N}$ are limita a și scriem $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ dacă:*

Oricare ar fi $V_a \in \mathcal{V}_a$, există $L \in N$ astfel încît oricare ar fi $n > L$, $a_n \in V_a$. Să se scrie cuantificat această propoziție.

$(\forall V_a)(\exists L)(\forall n)(n > L \to a_n \in V_a)$.

10. *Fie G o mulțime pe care este definită o lege de compoziție internă notată multiplicativ, $e \in G$, $x \in G$, $y \in G$, $z \in G$, $x' \in G$. Să se scrie cuantificat propozițiile:*

a) *Oricare ar fi x, y, z, avem: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (proprietatea de asociativitate).*

c) *Există $e \in G$, astfel încît oricare ar fi $x \in G$, avem $e \cdot x = x$ și $x \cdot e = x$ (existența elementului neutru).*

d) *Pentru orice $x \in G$, există $x' \in G$, astfel încît $x' \cdot x = e$ și $x \cdot x' = e$ (orice element este simetrizabil;* în ipoteza că propoziția (c) este adevărată). (Propozițiile a), b), c), d), constituie definiția grupului abelian în notație multiplicativă; manualul de algebră pentru clasa a XII-a).

a) $\forall(x, y, z)((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$

b) $\forall(x, y)(x \cdot y = y \cdot x)$

c) $(\exists e)(\forall x)(ex = x \wedge xe = x)$

d) $(\forall x)(\exists x')(x' \cdot x = e \wedge x \cdot x' = e)$

§ 7. REGULI DE NEGARE. EXERCIŢII

Fie $p : M \to L$ şi $q : M \to L$ două predicate şi $x \in M$.

1. **Negarea propoziţiilor universale**

Negaţia propoziţiei „orice $x \in M$ are proprietatea $p(x)$" este propoziţia „există $x \in M$, cu proprietatea $\bar{p}(x)$". Scrierea cuantificată :

$$\overline{(\forall\, x)(p(x)}) \leftrightarrow (\exists\, x)(\bar{p}(x)).$$

2. **Negarea proprietăţilor existenţiale**

Negaţia propoziţiei „există $x \in M$ cu proprietatea $p(x)$" este propoziţia „orice $x \in M$ are proprietatea $\bar{p}(x)$". Scrierea cuantificată :

$$\overline{(\exists\, x)(p(x))} \leftrightarrow (\forall\, x)(\bar{p}(x)).$$

3. **Negarea disjuncţiei**

Negarea disjuncţiei se face pe baza proprietăţii P_9 din § 5.

$$\overline{p(x) \vee q(x)} \leftrightarrow \overline{p(x)} \wedge \overline{q(x)}.$$

4. **Negarea conjuncţiei**

Negarea conjuncţiei se face pe baza proprietăţii P'_9 din § 5.

$$\overline{p(x) \wedge q(x)} \Leftrightarrow \bar{p}(x) \vee \bar{q}(x).$$

5. *Rezumat.* Prin negare, proprietăţile $p(x)$, $q(x)$ etc. se transformă în $\overline{p(x)}$, $\overline{q(x)}$ etc., *„oricare"* se transformă în *„există"*, *„există"* se transformă în *„oricare"*, *„sau"* se transformă în *„şi"*, iar *„şi"* se transformă în *„sau"*.

6. **Negarea implicaţiei**

Negarea implicaţiei se bazează pe proprietatea P_{11} § 2, ($p \to q \equiv \bar{p} \vee q$), pe proprietatea P_{10}, § 1, ($\bar{\bar{p}} = p$) şi pe negarea disjuncţiei.

Avem :

$$\overline{p \to q} \leftrightarrow \overline{\bar{p} \vee q} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \bar{\bar{p}} \wedge \bar{q} \leftrightarrow p \wedge \bar{q}.$$

Deci propoziţia $p \to q$ se neagă prin propoziţia $p \wedge \bar{q}$ (se realizează ipoteza p, dar nu se realizează concluzia q).

7. **Exerciţii**

1) Fie $x \in \mathbf{R}$ şi $y \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$. Să se nege următoarele propoziţii :

$p_1 : x = y$. $p_4 : x > y$. $p_7 : x \in [a, \infty)$.

$p_2 : x < y$. $p_5 : x \geqslant y$. $p_8 : x \in (1, 3]$.

$p_3 : x \leqslant y$. $p_6 : x \in \mathbf{R}$. $p_9 : x \notin [2, 4)$.

Răspuns :

$\bar{p}_1 : x \neq y$ $\quad$ $\bar{p}_3 : x > y$ $\quad$ $\bar{p}_5 : x < y$

$\bar{p}_2 : x \geqslant y$ $\quad$ $\bar{p}_4 : x \leqslant y$ $\quad$ $\bar{p}_6 : x \notin \mathbf{R}$

Avem $p_7 \Leftrightarrow x \geqslant a$ şi deci $\bar{p}_7 : x < a$.
Avem $p_8 \Leftrightarrow (x \leqslant 3) \wedge (x > 1)$ şi deci $\bar{p}_8 : (x > 3) \vee (x \leqslant 1)$.
Avem $p_9 \Leftrightarrow (x < 2) \vee (x \geqslant 4)$ şi deci $\bar{p}_9 : (x \geqslant 2) \wedge (x < 4)$.

2. *Să se nege propoziţiile din § 6, ţinîndu-se seama de scrierea lor cuantificată şi apoi să se transcrie enunţul în cuvinte. Să se precizeze valoarea de adevăr a propoziţiilor, atunci cînd e cazul.*

1°. Avem $\overline{(\forall x)(x^2 - 4x + 5 > 0)} \longleftrightarrow (\exists x)(x^2 - 4x + 5 \leqslant 0)$.
Propoziţia 1 este adevărată şi deci negaţia sa este falsă.
Enunţul negaţiei : „există $x \in \mathbf{R}$, astfel încît $x^2 - 4x + 5 \leqslant 0$".

2°. Avem $\overline{(\exists x)(x^2 - 3x + 2 = 0)} \longleftrightarrow (\forall x)(x^2 - 3x + 2 \neq 0)$.
Propoziţia (2) este adevărată şi deci negaţia sa este falsă.
Enunţul negaţiei : „pentru orice $x \in \mathbf{R}$, avem $x^2 - 3x + 2 \neq 0$".

3°. Avem $\overline{(\forall x)(x^2 - 3x + 4 < 0)} \longleftrightarrow (\exists x)(x^2 - 3x + 4 \geqslant 0)$.
Propoziţia (3) este falsă şi deci negaţia sa este adevărată.
Enunţul negaţiei : „există $x \in \mathbf{R}$, astfel încît $x^2 - 3x + 4 \geqslant 0$".

4°. Avem $\overline{(\exists x)(x^2 + x + 1 = 0)} \longleftrightarrow (\forall x)(x^2 + x + 1 \neq 0)$.
Propoziţia (4) este falsă şi deci negaţia ei este adevărată.
Enunţul negaţiei : „pentru orice $x \in \mathbf{R}$, avem $x^2 + x + 1 \neq 0$".

5°. a) Avem : $\overline{(\forall x)(\exists y)(x + y = 2)} \longleftrightarrow (\exists x)(\forall y)(x + y \neq 2)$.
Propoziţia (a) este adevărată şi deci negaţia sa este falsă.
Enunţul negaţiei : „există $x \in \mathbf{R}$, astfel încît oricare ar fi $y \in \mathbf{R}$ avem $x + y \neq 2$".

b) Avem $\overline{(\exists x)(\forall y)(x + y = 2)} \longleftrightarrow (\forall x)(\exists y)(x + y \neq 2)$.
Propoziţia (b) este falsă şi deci negaţia ei este adevărată.
Enunţul negaţiei : „pentru orice $x \in \mathbf{R}$, există $y \in \mathbf{R}$, astfel încît $x + y \neq 2$".

6°. a) Avem $\overline{\forall(x_1, x_2)(x_1 \neq x_2) \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))} \longleftrightarrow$
$\longleftrightarrow \exists(x_1, x_2)(x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2))$.

Enunţul negaţiei : (funcţie neinjectivă) „Există $x_1 \in A$ şi $x_2 \in A$ astfel încît $x_1 \neq x_2$ şi $f(x_1) = f(x_2)$".

b) Avem $\overline{(\forall y)(\exists x)(y = f(x))} \longleftrightarrow (\exists y)(\forall x)(y \neq f(x))$.

Enunţul negaţiei (funcţie nesurjectivă) : „există $y \in B$, astfel încît oricare ar fi $x \in A$, avem $y \neq f(x)$".

7°. Avem $\overline{(\forall(x_1, x_2))(x_1 \leqslant x_2 \to f(x_1) \leqslant f(x_2))} \longleftrightarrow$

$$\longleftrightarrow (\exists(x_1, x_2))(x_1 \leqslant x_2 \wedge f(x_1) > f(x_2)).$$

Enunțul negației (funcție necrescătoare pe I): „există $x_1 \in I$ și $x_2 \in I$ astfel încît $x_1 \leqslant x_2$ și $f(x_1) > f(x_2)$".

8°. a) Avem: $\overline{(\exists a)(\forall \varepsilon)(\exists N(\varepsilon))(\forall n)(n > N(\varepsilon) \to |a_n - a| < \varepsilon)} \longleftrightarrow$

$$\longleftrightarrow (\forall a)(\exists \varepsilon)(\forall N(\varepsilon))(\exists n)(n > N(\varepsilon) \wedge |a_n - a| \geqslant \varepsilon)$$

Enunțul negației (șir divergent): „oricare ar fi $a \in \mathbf{R}$, există $\varepsilon > 0$ astfel încît oricare ar fi numărul natural $N(\varepsilon)$, există un număr natural n, cu proprietatea că $n > N(\varepsilon)$ și $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$.

b) Avem $\overline{(\exists M)(\forall n)(a_n < M)} \longleftrightarrow (\forall M)(\exists n)(|a_n| \geqslant M)$.

Enunțul negației (șir nemărginit): „oricare ar fi $M > 0$, există un număr natural n, astfel încît $|a_n| \geqslant M$".

9°. Avem: $\overline{(\forall V_a)(\exists L)(\forall n)(n > L \to a_n \in V_a)} \longleftrightarrow$

$$\longleftrightarrow (\exists V_a)(\forall L)(\exists n)(n > L \wedge a_n \notin V_a)$$

Enunțul negației (șir care nu are limita a): „există o vecinătate V_a a lui $a \in \overline{\mathbf{R}}$, astfel încît pentru orice număr natural L, există un număr natural n cu proprietatea că $n > L$ și $a_n \notin V_a$".

10°. a) Avem: $\overline{\forall(x, y, z)((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)} \longleftrightarrow$

$$\longleftrightarrow \exists(x, y, z)((x \cdot y) \cdot z \neq x \cdot (y \cdot z)).$$

Enunțul negației (lege de compoziție internă neasociativă): „există $x \in G$, $y \in G$, $z \in G$, astfel încît $(x \cdot y) \cdot z \neq x \cdot (y \cdot z)$".

b) Avem: $\overline{\forall(x, y)(x \cdot y = y \cdot x)} \longleftrightarrow \exists(x, y)(x \cdot y \neq y \cdot x)$.

Enunțul negației (lege de compoziție internă necomutativă): „există $x \in G$ și $y \in G$ astfel încît $x \cdot y \neq y \cdot x$".

c) Avem: $\overline{(\exists e)(\forall x)(e \cdot x = x \wedge x \cdot e = x)} \longleftrightarrow$

$$\longleftrightarrow (\forall e)(\exists x)(e \cdot x \neq x \vee x \cdot e \neq x).$$

Enunțul negației (lipsa elementului neutru): „oricare ar fi $e \in G$, există $x \in G$, astfel încît $e \cdot x \neq x$ sau $x \cdot e \neq x$".

d) Avem: $\overline{(\forall x)(\exists x')(x' \cdot x = e \wedge x \cdot x' = e)} \longleftrightarrow$

$$\leftrightarrow (\exists x)(\forall x')(x' \cdot x \neq e \vee x \cdot x' \neq e).$$

Enunțul negației: „există $x \in G$, astfel încît oricare ar fi $x' \in G$, avem $x' \cdot x \neq e$ sau $x \cdot x' \neq e$.

CAPITOLUL II

ELEMENTE DE TEORIA MULȚIMILOR

În acest capitol presupunem cunoscute principalele operații cu mulțimi tratate în manualul de algebră pentru clasa a IX-a.

§ 1. PROBLEME CARE SE REZOLVĂ PE BAZA PROPRIETĂȚILOR CALCULULUI CU PROPOZIȚII

I. În acest paragraf vor fi folosite în mod special propozițiile $P_1, \ldots, P_{10}, P'_1, \ldots, P'_9$ din § 1, respectiv § 5, capitolul I. Reamintim că prin notația $p(x) \Rightarrow q(x)$, respectiv $p(x) \Leftrightarrow q(x)$, înțelegem propoziția $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$, respectiv, $(\forall x)(p(x) \leftrightarrow q(x))$.

Vor fi necesare următoarele proprietăți:

Fie M o mulțime, A și B părți (submulțimii ale mulțimii M) și $x \in M$.

M_1. *Următoarele propoziții sînt echivalente:*

a) $A \subseteq B$.

b) $x \in A \Rightarrow x \in B$.

Observație. Notația (b) este o scriere convențională pentru propoziția b') $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$.

M_2. *Următoarele propoziții sînt echivalente.*

a) $A = B$.

b) $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.

c) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)$.

d) $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

Observație. Notațiile c) și d) sînt scrieri convenționale ale propozițiilor:

c') $(\forall x)((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A))$.

d') $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$.

M_3. *Ținînd seama că* $A \cup B = \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$ *(reuniunea dintre mulțimea A și B) rezultă că următoarele propoziții sînt echivalente:*

a) $x \in A \cup B$.

b) $(x \in A) \vee (x \in B)$.

Observaţie : Notaţiile a) şi b) sînt scrieri convenţionale ale propoziţiilor :

a′) $(\forall x)(x \in A \cup B)$.

b′) $(\forall x)((x \in A) \vee (x \in B))$.

M$_4$. *Ţinînd seama că* $A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ *(intersecţia dintre mulţimea A şi mulţimea B) rezultă că următoarele propoziţii sînt echivalente.*

a) $x \in A \cap B$.

b) $(x \in A) \wedge (x \in B)$.

Observaţie : Notaţiile a) şi b) sînt scrieri convenţionale ale propoziţiilor :

a′) $(\forall x)(x \in A \cap B)$.

b′) $(\forall x)((x \in A) \wedge (x \in B))$.

M$_5$. *Ţinînd seama că* $A - B = \{x \mid x \in A$ şi $x \notin B\}$ *(diferenţa dintre mulţimea A şi mulţimea B) rezultă că următoarele propoziţii sînt echivalente.*

a) $x \in A - B$.

b) $(x \in A) \wedge (x \notin B)$.

Observaţie : Notaţiile a) şi b) sînt scrieri convenţionale ale propoziţiilor :

a′) $(\forall x)(x \in A - B)$.

b′) $(\forall x)((x \in A) \wedge (x \notin B))$.

M$_6$. *Ţinînd seama că* $\bar{A} = C_M A = \{x \mid x \notin A\}$ *(complementara mulţimii A în raport cu mulţimea totală M), rezultă că următoarele propoziţii sînt echivalente :*

a) $x \in \bar{A}$.

b) $x \notin A$.

Observaţie : Notaţiile a) şi b) sînt scrieri convenţionale ale propoziţiilor :

a′) $(\forall x)(x \in \bar{A})$.

b′) $(\forall x)(x \notin A)$.

M$_7$. *Ţinînd seama că* $A \times B = \{(a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}$ *(produsul cartezian dintre mulţimea A şi mulţimea B) rezultă că următoarele propoziţii sînt echivalente :*

a) $(a, b) \in A \times B$.

b) $(a \in A) \wedge (b \in B)$.

II. Exerciţii

1. *Fie a şi b două numere întregi. Să se arate că mulţimea A a divizorilor comuni ai numerelor a şi b este egală cu mulţimea B a divizorilor comuni ai numerelor* $2a + 3b$ *şi* $a + 2b$.

Soluție. Vom arăta că $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$.

Fie $x \in A$. Există $q_1 \in \mathbf{Z}$ $q_2 \in \mathbf{Z}$, astfel încît $a = q_1x$ și $b = q_2x$. Avem $2a + 3b = (2q_1 + 3q_2)x$ și $a + 2b = (q_1 + 2q_2)x$ și deci $x \in B$. Rezultă $A \subseteq B$.

Fie $x \in B$. Există $r_1 \in \mathbf{Z}$ i $r_2 \in \mathbf{Z}$, astfel încît $2a + 3b = r_1x$ și $a + 2b = r_2x$. Rezolvînd sistemul : $\begin{cases} 2a + 3b = r_1x \\ a + 2b = r_2x \end{cases}$ în raport cu necunoscutele a și b obținem $a = (2r_1 - 3r_2)x$ și $b = (2r_2 - r_1)x$, adică x este un divizor comun al numerelor a și b și deci $x \in A$. Rezultă $B \subseteq A$.

Din $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$ deducem $A = B$.

2. *Fie A și B părți ale unei mulțimi M. Să se arate că următoarele propoziții sînt echivalente :*

a) $A \subseteq B$.

b) $A \cup B = B$.

c) $A \cap B = A$.

Soluție. Se va arăta că a) $\Leftrightarrow$ b) și a) $\Leftrightarrow$ c).

Fie $A \subseteq B$ și $x \in A \cup B$, adică $x \in A$ sau $x \in B$. Dacă $x \in A$, ținînd seama că $A \subseteq B$, rezultă $x \in B$. Așadar, $A \cup B \subseteq B$. Incluziunea $B \subseteq A \cup B$ este evidentă. Deducem : $A \cup B = B$ și deci a) $\Rightarrow$ b).

Fie $A \cup B = B$ și $x \in A$. Rezultă $x \in A \cup B$, adică $x \in B$ și deci $A \subseteq B$, adică b) $\Rightarrow$ a).

Din a) $\Rightarrow$ b) și b) $\Rightarrow$ a), deducem a) $\Leftrightarrow$ b).

Echivalența a) $\Leftrightarrow$ c) se va demonstra în mod analog.

3. *Fie A, B, C trei părți ale unei mulțimi M. Să se arate că dacă :*

a) $A \cup B = A \cup C$.

b) $A \cap B = A \cap C$, *atunci* $B = C$.

Soluție. Dacă $x \in B$, atunci $x \in A \cup B$ și conform relației a) $x \in A \cup C$, adică $x \in A$ sau $x \in C$.

În cazul $x \in A$, ținînd seamă că $x \in B$, deducem $x \in A \cap B$ și aplicînd relația b) rezultă $x \in A \cap C$, adică $x \in A$ și $x \in C$.

Așadar, în toate cazurile dacă $x \in B$, atunci $x \in C$. Rezultă $B \subseteq C$.

Dacă $x \in C$, atunci $x \in A \cup C$ și conform relației a) $x \in A \cup B$, adică $x \in A$ sau $x \in B$.

Dacă $x \in A$, ținînd seama că $x \in C$, rezultă $x \in A \cap C$ și aplicînd relația b), deducem $x \in A \cap B$, adică $x \in A$ și $x \in B$.

Așadar, în toate cazurile dacă $x \in C$, atunci $x \in B$. Rezultă $C \subseteq B$.

Incluziunile $B \subseteq C$ și $C \subseteq B$ demonstrează că $B = C$.

Observație: Notațiile a) și b) sînt scrieri convenționale ale propozițiilor:

a') $(\forall x)(x \in A \cup B)$.
b') $(\forall x)((x \in A) \vee (x \in B))$.

M$_4$. *Ținînd seama că* $A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ *(intersecția dintre mulțimea A și mulțimea B) rezultă că următoarele propoziții sînt echivalente.*

a) $x \in A \cap B$.
b) $(x \in A) \wedge (x \in B)$.

Observație: Notațiile a) și b) sînt scrieri convenționale ale propozițiilor:

a') $(\forall x)(x \in A \cap B)$.
b') $(\forall x)((x \in A) \wedge (x \in B))$.

M$_5$. *Ținînd seama că* $A - B = \{x \mid x \in A$ și $x \notin B\}$ *(diferența dintre mulțimea A și mulțimea B) rezultă că următoarele propoziții sînt echivalente.*

a) $x \in A - B$.
b) $(x \in A) \wedge (x \notin B)$.

Observație: Notațiile a) și b) sînt scrieri convenționale ale propozițiilor:

a') $(\forall x)(x \in A - B)$.
b') $(\forall x)((x \in A) \wedge (x \notin B))$.

M$_6$. *Ținînd seama că* $\bar{A} = C_M A = \{x \mid x \notin A\}$ *(complementara mulțimii A în raport cu mulțimea totală M), rezultă că următoarele propoziții sînt echivalente:*

a) $x \in \bar{A}$.
b) $x \notin A$.

Observație: Notațiile a) și b) sînt scrieri convenționale ale propozițiilor:

a') $(\forall x)(x \in \bar{A})$.
b') $(\forall x)(x \notin A)$.

M$_7$. *Ținînd seama că* $A \times B = \{(a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}$ *(produsul cartezian dintre mulțimea A și mulțimea B) rezultă că următoarele propoziții sînt echivalente:*

a) $(a, b) \in A \times B$.
b) $(a \in A) \wedge (b \in B)$.

II. Exerciții

1. *Fie a și b două numere întregi. Să se arate că mulțimea A a divizorilor comuni ai numerelor a și b este egală cu mulțimea B a divizorilor comuni ai numerelor* $2a + 3b$ *și* $a + 2b$.

Soluție. Vom arăta că $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$.

Fie $x \in A$. Există $q_1 \in \mathbf{Z}$ $q_2 \in \mathbf{Z}$, astfel încît $a = q_1x$ și $b = q_2x$. Avem $2a + 3b = (2q_1 + 3q_2)x$ și $a + 2b = (q_1 + 2q_2)x$ și deci $x \in B$. Rezultă $A \subseteq B$.

Fie $x \in B$. Există $r_1 \in \mathbf{Z}$ i $r_2 \in \mathbf{Z}$, astfel încît $2a + 3b = r_1x$ și $a + 2b = r_2x$. Rezolvînd sistemul : $\begin{cases} 2a + 3b = r_1x \\ a + 2b = r_2x \end{cases}$ în raport cu necunoscutele a și b obținem $a = (2r_1 - 3r_2)x$ și $b = (2r_2 - r_1)x$, adică x este un divizor comun al numerelor a și b și deci $x \in A$. Rezultă $B \subseteq A$.

Din $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$ deducem $A = B$.

2. *Fie A și B părți ale unei mulțimi M. Să se arate că următoarele propoziții sînt echivalente :*

a) $A \subseteq B$.
b) $A \cup B = B$.
c) $A \cap B = A$.

Soluție. Se va arăta că a) $\Leftrightarrow$ b) și a) $\Leftrightarrow$ c).

Fie $A \subseteq B$ și $x \in A \cup B$, adică $x \in A$ sau $x \in B$. Dacă $x \in A$, ținînd seama că $A \subseteq B$, rezultă $x \in B$. Așadar, $A \cup B \subseteq B$. Incluziunea $B \subseteq A \cup B$ este evidentă. Deducem: $A \cup B = B$ și deci a) $\Rightarrow$ b).

Fie $A \cup B = B$ și $x \in A$. Rezultă $x \in A \cup B$, adică $x \in B$ și deci $A \subseteq B$, adică b) $\Rightarrow$ a).

Din a) $\Rightarrow$ b) și b) $\Rightarrow$ a), deducem a) $\Leftrightarrow$ b).

Echivalența a) $\Leftrightarrow$ c) se va demonstra în mod analog.

3. *Fie A, B, C trei părți ale unei mulțimi M. Să se arate că dacă :*

a) $A \cup B = A \cup C$.
b) $A \cap B = A \cap C$, *atunci* $B = C$.

Soluție. Dacă $x \in B$, atunci $x \in A \cup B$ și conform relației a) $x \in$ $\in A \cup C$, adică $x \in A$ sau $x \in C$.

În cazul $x \in A$, ținînd seamă că $x \in B$, deducem $x \in A \cap B$ și aplicînd relația b) rezultă $x \in A \cap C$, adică $x \in A$ și $x \in C$.

Așadar, în toate cazurile dacă $x \in B$, atunci $x \in C$. Rezultă $B \subseteq C$.

Dacă $x \in C$, atunci $x \in A \cup C$ și conform relației a) $x \in A \cup B$, adică $x \in A$ sau $x \in B$.

Dacă $x \in A$, ținînd seama că $x \in C$, rezultă $x \in A \cap C$ și aplicînd relația b), deducem $x \in A \cap B$, adică $x \in A$ și $x \in B$.

Așadar, în toate cazurile dacă $x \in C$, atunci $x \in B$. Rezultă $C \subseteq B$.

Incluziunile $B \subseteq C$ și $C \subseteq B$ demonstrează că $B = C$.

4. *Fie A și B două părți ale unei mulțimi M. Să se arate că dacă* $A \cup B = A \cap B$, *atunci* $A = B$.

Soluție. Dacă $x \in A$, atunci $x \in A \cup B$ și $x \in A \cap B$, adică $x \in A$ și $x \in B$. Deci dacă $x \in A$, atunci $x \in B$. Rezultă $A \subseteq B$.

În mod analog se demonstrează incluziunea $B \subseteq A$ și deci egalitatea $A = B$.

5. *Fie A, B părți ale unei mulțimi M și* $x \in M$. *Să se nege propozițiile:*

a) $x \in A \cup B$. c) $x \in A - B$. e) $A = B$.
b) $x \in A \cap B$. d) $A \subseteq B$. f) $(x, y) \in A \times B$.

Soluție. a) Ținînd seama că $x \in A \cup B \Leftrightarrow (\forall x)((x \in A) \vee (x \in B))$, avem: $x \notin A \cup B \Leftrightarrow (\exists x)((x \notin A) \wedge (x \notin B))$.

Această relație va fi scrisă convențional astfel: $x \notin A \cup B \Leftrightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B)$.

b) Ținînd seama că $x \in A \cap B \Leftrightarrow (\forall x)((x \in A) \wedge (x \in B))$, avem $x \notin A \cap B \Leftrightarrow (\exists x)((x \notin A) \vee (x \notin B))$.

Această relație va fi scrisă convențional astfel $x \notin A \cap B \Leftrightarrow (x \notin A) \vee \vee (x \notin B)$.

c) Ținînd seama că $x \in A - B \Leftrightarrow (\forall x)((x \in A) \wedge (x \notin B))$ avem $x \notin A - B \Leftrightarrow (\exists x)((x \notin A) \vee (x \in B))$.

Această relație va fi scrisă convențional astfel: $x \notin A - B \Leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \in B)$.

d) Ținînd seama că propoziția $A \subseteq B$ este echivalentă cu propoziția $(\forall x)((x \in A) \rightarrow (x \in B))$, avem $A \nsubseteq B \Leftrightarrow (\exists x)((x \in A) \wedge (x \notin B))$.

e) Ținînd seama că propoziția $A = B$ este echivalentă cu propoziția $(\forall x)(((x \in A) \rightarrow (x \in B)) \wedge ((x \in B)) \rightarrow (x \in A)))$ avem $A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)(((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \in B)) \wedge (x \notin A)))$.

f) Ținînd seama că $(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (y \in B)$, avem $(x, y) \notin A \times B \Leftrightarrow (x \notin A) \vee (y \notin B)$.

6. *Fie A, B, C părți ale unei mulțimi M. Să se demonstreze egalitățile:*

a) $A - (B \cup C) = (A - B) - C$.
b) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

Soluție. a) Avem: $x \in A - (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin (B \cup C) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge ((x \notin B) \wedge (x \notin C)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (A - B) \wedge x \notin C \Leftrightarrow x \in (A - B) - C.$$

Deoarece $x \in A - (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A - B) - C$, avem $A - (B \cup C) = (A - B) - C$.

b) Avem: $x \in A - (B \cap C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B \cap C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge ((x \notin B) \vee (x \notin C)) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee \vee ((x \in A) \wedge (x \notin C)$ (s-a aplicat proprietatea P_5, § 1, capitolul I) $\Leftrightarrow (x \in A - B) \vee (x \in A - C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (A - C)$.

Deoarece $x \in A - (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (A - C)$, avem egalitatea din enunţ.

7. *Să se arate că* $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Soluţie. Avem:

$$(x, y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (y \in B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge$$
$$\wedge ((y \in B) \vee (y \in C)) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (y \in B)) \vee (x \in A) \wedge (y \in C)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((x, y) \in (A \times B) \vee ((x, y) \in A \times C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup$$
$$\cup (A \times C).$$

8. *Să se arate că* $A \times (B - C) \subseteq (A \times B) - (A \times C)$.

Soluţie. Avem:

$$(x, y) \in A \times (B - C) \Rightarrow (x \in A) \wedge (x \in B - C) \Rightarrow (x \in A) \wedge$$
$$\wedge ((y \in B) \wedge (y \notin C)) \Rightarrow ((x, y) \in A \times B) \wedge ((x, y) \notin (A \times C)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x, y) \in (A \times B) - (A \times C).$$

§ 2. STRUCTURA DE ALGEBRĂ BOOLE A MULŢIMII PĂRŢILOR UNEI MULŢIMI. PROBLEME CARE SE REZOLVĂ PE BAZA CALCULULUI ÎNTR-O ALGEBRĂ BOOLE

1. *Fie M o mulţime, A, B, C părţi ale mulţimii M, $\emptyset$ mulţimea vidă şi $x \in M$.*

Dacă în propoziţiile $P_1, \ldots, P_{10}, P'_1, \ldots, P'_9$ din § 5, capitolul I, înlocuim predicatul $p(x)$ cu $x \in A$, $q(x)$ cu $x \in B$, $r(x)$ cu $x \in C$, pe $f(x)$ cu predicatul $x \in \emptyset$ (evident fals pentru orice $x \in M$) şi pe $a(x)$ cu predicatul $x \in M$ (evident adevărat pentru orice $x \in M$) şi dacă ţinem seama că relaţia $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ este echivalentă cu relaţia $A = B$ între mulţimi, propoziţiile $P_1, \ldots, P_{10}$ şi $P'_1, \ldots, P'_9$ se transformă în egalităţi de mulţimi.

De exemplu, propoziţia P_1, $(p(x) \vee q(x)) \vee r(x) \Leftrightarrow p(x) \vee (q(x) \vee r(x))$, devine $((x \in A) \vee (x \in B)) \vee (x \in C) \Leftrightarrow (x \in A) \vee ((x \in B) \vee (x \in C))$, care reprezintă următoarea egalitate de mulţimi:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Așadar, propozițiile $P_1, \ldots, P_{10}, P'_1, \ldots, P'_9$ cu înlocuirile menționate mai înainte se transformă în următoarele egalități de mulțimi.

Oricare ar fi părțile A, B, C ale mulțimii M avem:

B_1. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	B'_1. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Reuniunea, respectiv intersecția, este *asociativă*	
B_2. $A \cup B = B \cup A$	B'_2. $A \cap B = B \cap A$
Reuniunea, respectiv intersecția, este *comutativă*	
B_3. $A \cup A = A$	B'_3. $A \cap A = A$
Reuniunea, respectiv intersecția, are proprietatea de *idempotență*	
B_4. $A \cup (A \cap B) = A$	B'_4. $A \cap (A \cup B) = A$
Reuniunea, respectiv intersecția, are proprietatea de *absorbție*	
B_5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	B'_5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Reuniunea, respectiv intersecția, este *distributivă* față de intersecție, respectiv reuniune	
B_6. $A \cup \emptyset = A$	B'_6. $A \cap \emptyset = \emptyset$
B_7. $A \cup M = M$	B'_7. $A \cap M = A$
B_8. $A \cup \overline{A} = M$ Legea *terțiului exclus*	B'_8. $A \cap \overline{A} = \emptyset$ *Legea contradicției*
B_9. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	B'_9. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
Legile lui de Morgan	
B_{10} $\overline{\overline{A}} = A$	
Legea *dublei negații*	

Proprietățile $B_1, \ldots, B_{10}, B'_1, \ldots, B'_9$ înzestrează mulțimea părților mulțimii M cu o structură de *algebră Boole*.

La acestea mai adăugăm următoarele proprietăți evidente:

$$B_{11}.\ A - B = A \cap \overline{B}.$$

$$B_{12}.\ A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A.$$

În procesul de predare, proprietățile $B_1, B_2, \ldots, B_{10}, B'_1, B'_2, \ldots, B'_9$ și chiar B_{11} și B_{12} pot fi acceptate ca axiome (deși ele nu sînt independente), eventual justificate cu diagrama Venn-Euler.

Proprietățile B_1 și B_2, respectiv B'_1 și B'_2 permit ca într-o expresie care conține numai reuniuni, respectiv numai intersecții, să nu mai punem parantezele, scriind mulțimile în orice ordine dorim.

De exemplu, vom scrie :

a) $A \cup B \cup C =$
$= B \cup A \cup C =$
$= B \cup C \cup A$ etc.

sau
$A \cap B \cap C =$
$= B \cap A \cap C =$
$= B \cap C \cap A$ etc.

b) $A \cup B \cup C \cup D =$
$= B \cup A \cup D \cup C =$
$= D \cup C \cup B \cup A$ etc.

sau
$A \cap B \cap C \cap D =$
$= B \cap A \cap D \cap C =$
$= D \cap C \cap B \cap A$ etc.

B_{13}. **Diferența simetrică.** Diferența simetrică dintre mulțimea A și mulțimea B se numește mulțimea : $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$.

B_{14}. *Consecințe ale proprietății de distributivitate.*

Fie A, B, C, D, E, F părți ale unei mulțimi M. Avem :

a) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D)$.

a') $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (C \cap D)$.

b) $(A \cap B) \cup (C \cap D) \cup (E \cap F) = (A \cup C \cup E) \cap (A \cup C \cup F) \cap (A \cup D \cup E) \cap (A \cup D \cup F) \cap (B \cup C \cup E) \cap (B \cup C \cup F) \cap (B \cup D \cup E) \cap (B \cup D \cup F)$.

b') $(A \cup B) \cap (C \cup D) \cap (E \cup F) = (A \cap C \cap E) \cup (A \cap C \cap F) \cup (A \cap D \cap E) \cup (A \cap D \cap F) \cup (B \cap C \cap E) \cup (B \cap C \cap F) \cup (B \cap D \cap E) \cup (B \cap D \cap F)$.

Demonstrație. a) Avem : $(A \cap B) \cup (C \cap D) = ((A \cap B) \cup C) \cap ((A \cap B) \cup D) =$ (proprietatea B_5) $= ((A \cup C) \cap (B \cup C)) \cap \cup ((A \cup D) \cap (B \cup D)) = (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D)$.

S-a folosit, evident, permanent proprietatea de asociativitate și comutativitate. Celelalte proprietăți se demonstrează analog.

II. Exerciții

1) *Fie A, B, C, părți ale unei mulțimi M. Să se arate că :*

$$A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C).$$

Soluție. Avem :

$A - (B - C) = A \cap \overline{(B - C)} =$ (Proprietatea B_{11})
$= A \cap \overline{(B \cap \bar{C})} =$ (Proprietatea B_{11})
$= A \cap (\bar{B} \cup \bar{\bar{C}}) =$ (Proprietatea B_9')
$= A \cap (\bar{B} \cup C) =$ (Proprietatea B_{10})
$= (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap C) =$ (Proprietatea B_5')
$= (A - B) \cup (A \cap C)$ (Proprietatea B_{11})

2. *Să se demonstreze că dacă* $A \cap \bar{B} = B \cap \bar{A}$, *atunci* $A = B$.

Soluție: Avem:

$$A \cap \bar{B} = B \cap \bar{A} \Leftrightarrow A \cup (A \cap \bar{B}) = A \cup (B \cap \bar{A}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A = A \cup (B \cap \bar{A}) \Rightarrow \qquad \text{(Proprietatea } B_4\text{)}$$
$$\Rightarrow A = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A}) \Rightarrow \text{(Proprietatea } B_5\text{)}$$
$$\Rightarrow A = (A \cup B) \cap M \Rightarrow \qquad \text{(Proprietatea } B_8\text{)}$$
$$\Rightarrow A = A \cup B. \qquad \text{(Proprietatea } B_7'\text{)}$$

Raționînd în mod analog deducem:

$$A \cap \bar{B} = B \cap \bar{A} \Rightarrow B \cup (A \cap \bar{B}) = B \cup (B \cap \bar{A}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (B \cup A) \cap (B \cup \bar{B}) = B \Rightarrow (A \cup B) \cap M = B \Rightarrow B = A \cup B.$$

Deci: $A = B = A \cup B$.

Începînd de la exercițiul 3 nu vom mai preciza de fiecare dată proprietatea algebrei Boole care se aplică. Propunem cititorului să facă acest lucru.

3) *Să se verifice egalitățile:*

a) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

b) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

Soluție. Avem:

a) $A - (B \cup C) = A \cap \overline{(B \cup C)} = A \cap \bar{B} \cap \bar{C})$ și
$(A - B) \cap (A - C) = (A \cap \bar{B}) \cap (A \cap \bar{C}) = A \cap A \cap$
$\cap \bar{B} \cap \bar{C} = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$.

b) $A - (B \cap C) = A \cap \overline{(B \cap C)} = A \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) = (A \cap \bar{B}) \cup$
$\cup (A \cap \bar{C}) = (A - B) \cup (A - C)$.

4) *Fie* A, B, C *părți ale unei mulțimi* M. *Să se arate că:*

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup$$
$$\cup (C \cap A).$$

Soluție. Avem:

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap A) \cup$$
$$\cup (A \cap C \cap C) \cup (A \cap C \cap A) \cup (B \cap B \cap C) \cup$$
$$\cup (B \cap B \cap A) \cup (B \cap C \cap C) \cup (B \cap C \cap A).$$

Folosind proprietatea de absorbție (și evident asociativitatea și comutativitatea) obținem:

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B) \cup$$
$$\cup (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Aplicind proprietatea de absorbție (B_4) obținem:

$$(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B) = [(A \cap B) \cap C] \cup (A \cap B) = A \cap B.$$

Deci: $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup$
$$\cup (C \cap A).$$

5) *Fie M o mulțime și A, B, C trei părți ale mulțimii M. Să se arate că dacă* $A \cap B \cap C = \emptyset$, *atunci*:

$$\overline{A \cup \overline{(A \cup B)}} \cup \overline{B \cup \overline{(B \cup C)}} \cup \overline{C \cup \overline{(C \cup A)}} = A \cup B \cup C.$$

Soluție. **Avem**:

$$\overline{A \cup \overline{(A \cup B)}} \cup \overline{B \cup \overline{(B \cup C)}} \cup \overline{C \cup \overline{(C \cup A)}} = \overline{A \cup (\bar{A} \cap \bar{B})} \cup$$
$$\overline{B \cup (\bar{B} \cap \bar{C})} \cup \overline{C \cup (\bar{C} \cap \bar{A})} = (\bar{A} \cap \overline{(\bar{A} \cap \bar{B})}) \cup (\bar{B} \cap \overline{(\bar{B} \cap \bar{C})}) \cup$$
$$\cup (\bar{C} \cap \overline{(\bar{C} \cap \bar{A})}) = (\bar{A} \cap (\bar{\bar{A}} \cup \bar{\bar{B}})) \cup (\bar{B} \cap (\bar{\bar{B}} \cup \bar{\bar{C}})) \cup$$
$$\cup (\bar{C} \cap (\bar{\bar{C}} \cup \bar{\bar{A}})) = (\bar{A} \cap (A \cup B)) \cup (\bar{B} \cap (B \cup C)) \cup$$
$$\cup (\bar{C} \cap (C \cup A)) = (\bar{A} \cap A) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{B} \cap B) \cup (\bar{B} \cap C) \cup$$
$$\cup (\bar{C} \cap C) \cup (\bar{C} \cap A) = \emptyset \cup (\bar{A} \cap B) \cup \emptyset \cup (\bar{B} \cap C) \cup$$
$$\cup \emptyset \cup (\bar{C} \cap A) = (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{B} \cap C) \cup (\bar{C} \cap A) = (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) \cap$$
$$\cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup A) \cap (\bar{A} \cup C \cup \bar{C}) \cap (\bar{A} \cup C \cup A) \cap (B \cup \bar{B} \cup \bar{C}) \cap$$
$$\cap (B \cup \bar{B} \cup A) \cap (B \cup C \cup \bar{C}) \cap (B \cup C \cup A) = (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) \cap$$
$$\cap (M \cup \bar{B}) \cap (M \cup \bar{A}) \cap (M \cup C) \cup (M \cup \bar{C}) \cap (M \cup A) \cap$$
$$\cap (M \cup B) \cap (A \cup B \cup C) = \overline{(A \cap B \cap C)} \cap M \cap (A \cup B \cup C) =$$
$$= \overline{A \cap B \cap C} \cap (A \cup B \cup C).$$

Deoarece $A \cap B \cap C = \emptyset$, $\overline{A \cap B \cap C} = M$ și deci $\overline{A \cap B \cap C} \cap$ $\cap (A \cup B \cup C) = M \cap (A \cup B \cup C) = A \cup B \cup C$.

6) *Să se arate că oricare ar fi părțile A, B, C, ale unei mulțimi M avem*:

a) $A \Delta B = B \Delta A$ (proprietatea de comutativitate).

b) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ (proprietatea de asociativitate).

c) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ (intersecția este distributivă față de diferența simetrică.

Soluție. Avem:

a) Egalitatea $A \Delta B = B \Delta A$ rezultă din egalitatea $(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) = (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B})$.

b) $$\begin{aligned}(A\Delta B)\Delta C &= ((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}))\Delta C = ((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})) \cap \\ &\cap \bar{C}) \cup (C \cap \overline{(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})}) = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup \\ &\cup (B \cap \bar{A} \cap \bar{C}) \cup (C \cap (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{B} \cup A)) = \\ &= (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{A} \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{A} \cap \bar{B}) \cup \\ &\cup (C \cap \bar{A} \cap A) \cup (C \cap B \cap \bar{B}) \cup (C \cap B \cap A).\end{aligned}$$

Ținînd seama că $\bar{A} \cap A = \emptyset$ și $C \cap \emptyset = \emptyset$ rezultă:

$$(A\Delta B)\Delta C = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup \\ \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C).$$

Se observă că expresia lui $(A\Delta B)\Delta C$ rămîne neschimbată dacă se permută literele A, B și C între ele.

Așadar, $(A\Delta B)\Delta C = (B\Delta C)\Delta A$.

Ținînd seama de punctul (a), deducem $(B\Delta C)\Delta A = A\Delta(B\Delta C)$ și deci $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

c) Avem $A \cap (B\Delta C) = A \cap ((B \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{B})) = (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C)$ și

$$\begin{aligned}(A \cap B)\Delta(A \cap C) &= ((A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)}) \cup ((A \cap C) \cap \overline{(A \cap B)}) = \\ &= ((A \cap B) \cap (\bar{A} \cup \bar{C})) \cup ((A \cap C) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})) = \\ &= (A \cap B \cap \bar{A}) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap C \cap \bar{A} \cup \\ &\cup (A \cap C \cap \bar{B}) = (\emptyset \cap B) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup \\ &\cup (\emptyset \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) = (A \cap B \cap \bar{C}) \cup \\ &\cup (A \cap \bar{B} \cap C).\end{aligned}$$

§ 3. PROBLEME CARE SE REZOLVĂ CU AJUTORUL FUNCȚIEI CARACTERISTICE

I. Funcția caracteristică. Proprietăți

Fie M o mulțime și A o parte a sa.

Funcția $f_A : M \to \{0, 1\}$ pentru care $f_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in A, \\ 0, \text{ dacă } x \notin A, \end{cases}$

se numește funcția caracteristică a mulțimii A.

Menționăm următoarele proprietăți ale funcției caracteristice:

1. $f_\emptyset(x) = 0$, *oricare ar fi* $x \in M$.

Într-adevăr, dacă $x \in M$, atunci cazul $x \in \emptyset$ nu poate avea loc și deci $f_{\emptyset}(x) = 0$, oricare ar fi $x \in M$.

2. $f_M(x) = 1$, *oricare ar fi* $x \in M$.

Într-adevăr, dacă $x \in M$, atunci cazul $x \notin M$ nu poate avea loc și deci $f_M(x) = 1$, oricare ar fi $x \in M$.

3. $f_A^2(x) = f_A(x)$, *oricare ar fi* $x \in M$.

Într-adevăr, dacă $x \in A$, atunci $f_A(x) = f_A^2(x) = 1$, iar dacă $x \notin A$, atunci $f_A(x) = f_A^2(x) = 0$.

4. $f_{A\cap B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$, *oricare ar fi* $x \in M$.

Pentru demonstrație vom întocmi următorul tabel :

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cap B$	$f_{A\cap B}(x) = 1$	$f_A(x) = 1$	$f_B(x) = 1$	$f_A(x) \cdot f_B(x) = 1$
$x \in A$	$x \notin B$	$x \notin A \cap B$	$f_{A\cap B}(x) = 0$	$f_A(x) = 1$	$f_B(x) = 0$	$f_A(x) \cdot f_B(x) = 0$
$x \notin A$	$x \in B$	$x \notin A \cap B$	$f_{A\cap B}(x) = 0$	$f_A(x) = 0$	$f_B(x) = 1$	$f_A(x) \cdot f_B(x) = 0$
$x \notin A$	$x \notin B$	$x \notin A \cap B$	$f_{A\cap B}(x) = 0$	$f_A(x) = 0$	$f_B(x) = 0$	$f_A(x) \cdot f_B(x) = 0$

Se observă că în toate cazurile $f_{A\cap B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$.

5. $f_{\bar{A}}(x) = 1 - f_A(x)$, *oricare ar fi* $x \in M$.

Pentru demonstrație vom întocmi următorul tabel :

$x \in A$	$x \notin \bar{A}$	$f_{\bar{A}}(x) = 0$	$f_A(x) = 1$	$1 - f_A(x) = 0$
$x \notin A$	$x \in \bar{A}$	$f_{\bar{A}}(x) = 1$	$f_A(x) = 0$	$1 - f_A(x) = 1$

Se observă că în toate cazurile $f_{\bar{A}}(x) = 1 - f_A(x)$.

6. $f_{A\cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x)$, *oricare ar fi* $x \in M$.

Ținînd seama că $A \cup B = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$, deducem $f_{A\cup B}(x) = f_{\overline{\bar{A}\cap\bar{B}}}(x)$. Aplicînd proprietatea 5 și 4 rezultă :

$$f_{\overline{\bar{A}\cap\bar{B}}}(x) = 1 - f_{\bar{A}\cap\bar{B}}(x) = 1 - f_{\bar{A}}(x) \cdot f_{\bar{B}}(x) = 1 - (1 - f_A(x))(1 - f_B(x)) =$$
$$= f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x).$$

Deci : $f_{A\cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x)$.

7. $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (f_A(x) \leqslant f_B(x)$, *oricare ar fi* $x \in M$.

Ținînd seama că $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A \cap B = A)$, deducem : $(A \subseteq B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (A \cap B = A) \Leftrightarrow (f_{A\cap B}(x) = f_A(x)) \Leftrightarrow f_A(x) \cdot f_B(x) = f_A(x) \Leftrightarrow$
$f_A(x)(f_B(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow ((f_A(x) = 0)$ sau $f_B(x) = 1)) \Leftrightarrow (f_A(x) \leqslant f_B(x))$.

Această proprietate permite să înlocuim demonstrația unei incluziuni. prin demonstrația unei inegalități numerice (inegalitatea între valorile funcțiilor caracteristice ale mulțimilor care intră în incluziune).

8. $A = B \Leftrightarrow f_A(x) = f_B(x)$, *oricare ar fi* $x \in M$.

Într-adevăr,

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Leftrightarrow ((f_A(x) \leqslant f_B(x)) \wedge (f_B(x) \cdot f_A(x)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (f_A(x) = f_B(x)).$$

Această proprietate permite să înlocuim demonstrația unei egalități de mulțimi printr-o egalitate numerică (egalitatea între valorile funcțiilor caracteristice ale mulțimilor respective).

9. $f_{A\Delta B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - 2f_A(x) \cdot f_B(x)$ *oricare ar fi* $x \in M$.

Ținînd seama că $A\Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$ și aplicînd proprietățile 3, 4, 5 și 6 deducem : $f_{A\Delta B}(x) = f_{A\cap\bar{B}}(x) + f_{A\cap\bar{B}}(x) - f_{A\cap\bar{B}}(x) \cdot f_{B\cap\bar{A}}(x) =$ $= f_A(x)(1 - f_B(x)) + f_B(x)(1 - f_A)(x)) - f_A(x) \cdot f_B(x)(1 - f_B(x)(1 -$ $- f_A(x)) = f_A(x) + f_B(x) - 2f_A(x) \cdot f_B(x) = f_A^2(x) + f_B^2(x) - 2f_A(x)f_B(x) =$ $= (f_A(x) - f_B(x))^2$.

Observație. Funcția caracteristică a diferenței simetrice poate fi dată prin următoarea egalitate : $f_{A\Delta B}(x) = | f_A(x) - f_B(x) |$

Într-adevăr ținînd seama că $f_{A\Delta B}(x) = (f_A(x) - f_B(x))^2$ deducem că :

a) dacă $f_A(x) < f_B(x)$, atunci $f_A(x) = 0$ și $f_B(x) = 1$ și deci, în acest caz $(f_A(x) - f_B(x))^2 = f_B(x) - f_A(x) = 1$;

b) dacă $f_A(x) = f_B(x)$, atunci $(f_A(x) - f_B(x))^2 = f_A(x) - f_B(x) = 0$;

c) dacă $f_A(x) > f_B(x)$, atunci $f_A(x) = 1$ și $f_B(x) = 0$ și deci în acest caz $(f_A(x) - f_B(x))^2 = f_A(x) - f_B(x) = 1$.

II. Exerciții

1. *Fie A, B, C părți ale unei mulțimi M. Să se arate că dacă :*

a) $A \cap B = A \cap C$ *și*

b) $A \cup B = A \cup C$, *atunci* $B = C$

Soluție. Din a) rezultă $f_{A\cap B}(x) = f_{A\cap C}(x)$, adică $f_A(x) \cdot f_B(x) = f_A(x) \cdot$ $\cdot f_C(x)$ $(x \in M)$.

Din b) rezultă $f_{A\cup B}(x) = f_{A\cup C}(x)$, adică $f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x) =$ $= f_A(x) + f_C(x) - f_A(x) \cdot f_C(x)$ $(x \in M)$ și deci :

$$f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x) = f_C(x) - f_A(x) \cdot f_C(x).$$

Ținînd seama că $f_A(x) \cdot f_B(x) = f_A(x) \cdot f_C(x)$ deducem $f_B(x) = f_C(x)$ pentru orice $x \in M$ și deci $B = C$.

2. *Fie A și B părți ale unei mulțimi M. Să se arate că dacă* $A \cap B =$ $= A \cup B$, *atunci* $A = B$.

Soluție. Avem $f_{A\cap B}(x) = f_A(x)\cdot f_B(x) = f_{A\cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x)\cdot f_B(x)$.

Rezultă $f_A(x) + f_B(x) - 2f_A(x)\cdot f_B(x) = 0$ și deci $f_A^2(x) + f_B^2(x) - 2f_A(x)\cdot f_B(x) = 0$. Deducem $(f_A(x) - f_B(x))^2 = 0$, adică $f_A(x) = f_B(x)$, pentru orice $x \in M$. Rezultă $A = B$.

3. *Fie A, B, C părți ale unei mulțimi M. Să se arate că:*

$$A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C).$$

Soluție. Avem: $f_{A\cap(B\Delta C)}(x) = f_A(x)\cdot f_{B\Delta C}(x) = f_A(x)[f_B(x) + f_C(x) - 2f_B(x)f_C(x)] = f_A(x)f_B(x) + f_A(x)f_C(x) - 2f_A(x)f_B(x)f_C(x)$ și $f_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)}(x) = f_{A\cap B}(x) + f_{A\cap C}(x) - 2f_{A\cap B}(x)\cdot f_{A\cap C}(x) = f_A(x)\cdot f_B(x) + f_A(x)\cdot f_C(x) - 2f_A(x)f_B(x)f_A(x)f_C(x) = f_A(x)f_B(x) + f_A(x)f_C(x) - 2f_A(x)f_B(x)f_C(x)$.

Rezultă $f_{A\cap(B\Delta C)}(x) = f_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)}(x)$, pentru orice $x \in M$ și deci egalitatea din enunț.

§ 4. PROBLEME DE NUMĂRARE

1. *Fie M o mulțime finită cu n elemente. Să se arate că mulțimea părților mulțimii M are 2^n elemente.*

Soluție. Se știe că numărul submulțimilor cu k elemente ale mulțimii M $(0 \leqslant k \leqslant n)$ este C_n^k. Așadar, numărul submulțimilor mulțimii M este $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = (1 + 1)^n = 2^n$ (s-a aplicat formula binomului lui Newton).

2. *Fie A și B două mulțimi finite, prima cu n elemente, a doua cu m elemente. Să se arate că mulțimea $A \times B$ are $n\cdot m$ elemente.*

Soluție. Fie $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ și $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$.

Elementele produsului cartezian $A \times B$ pot fi scrise astfel:

$(a_1, b_1), (a_1, b_2), \ldots, (a_1, b_m)$

$(a_2, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_2, b_m)$

. . . .

$(a_n, b_1), (a_n b_2), \ldots, (a_n, b_m)$.

Deoarece avem n rînduri fiecare conținînd m elemente (cuple), înseamnă că mulțimea $A \times B$ are $n\cdot m$ elemente.

3. *Fie A, B, C trei mulțimi finite. Notăm cu $n(A)$, respectiv $n(B)$, $n(C)$ numărul de elemente al mulțimii A, respectiv B, C.*

Să se arate că:

a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

b) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$.

Soluție. a) Relația este evidentă căci în $A \cup B$ elementele comune, adică elementele mulțimii $A \cap B$, se numără o singură dată.

b) Aplicînd relația a) obținem succesiv $n(A \cup B \cup C) = n[(A \cup B) \cup C] = n(A \cup B) + n(C) - n[(A \cup B) \cap C] = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n[(A \cap C) \cup (B \cap C)] = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap C \cap B \cap C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$.

Observație. Relația a) poate fi generalizată pentru cazul a n mulțimi.

CAPITOLUL III

METODA INDUCŢIEI MATEMATICE

Metoda inducţiei matematice mai este cunoscută sub denumirea de *„raţionamentul prin recurenţă“* sau *„inducţie completă“* sau *„raţionamentul din aproape în aproape“*. Această metodă se aplică pentru a demonstra că anumite predicate $P(n)$, unde $n \in \mathbf{N}$, sînt adevărate pentru orice $n \geqslant a$ $(a \in \mathbf{N})$. Dezavantajul acestei metode constă în faptul că relaţia care trebuie demonstrată trebuie cunoscută dinainte. Sînt situaţii cînd prin analiza unor cazuri particulare se „întrezăreşte“ relaţia dorită. Procesul prin care se deduce această relaţie poartă numele de inducţie (incompletă). Relaţia nu poate fi acceptată decît pe baza unei demonstraţii prin inducţie completă. Unele din problemele din acest capitol vor fi tratate în două etape: 1) *inducţia*, 2) *demonstraţia prin inducţie comlpetă*. Vom prezenta *trei variante* ale raţionamentului prin inducţie completă.

În tot acest capitol vom nota cu $P(n)$ un predicat definit pentru orice $n \geqslant a$ $(n \in \mathbf{N},\ a \in \mathbf{N})$. De obicei $a = 0$ sau $a = 1$.

§ 1. VARIANTA 1

(vezi manualul de algebră pentru clasa a X-a).

Fie $P(n)$, $n \geqslant a$, un predicat.

Dacă

1. *propoziţia* $P(a)$ *este adevărată şi*

2. *oricare ar fi* $n \geqslant a$, *implicaţia* $P(n) \to P(n+1)$ *este adevărată, atunci oricare ar fi* $n \geqslant a$, $P(n)$ *este adevărată.*

Observaţie. Etapa (1) poartă numele de etapa de verificare.

Propoziţia de la punctul (2) se scrie prescurtat astfel: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $(n \geqslant a)$. Pentru a verifica implicaţia de la punctul (2) se arată că în toate cazurile în care $P(n)$ este adevărată $(n \geqslant a)$ rezultă că $P(n+1)$ este adevărată (în celelalte cazuri ipoteza este falsă şi deci implicaţia este adevărată).

În practică se raționează astfel:

„Presupunem că $P(n)$ este adevărată. Vom demonstra că și $P(n+1)$ este adevărată". S-ar părea că se comite un viciu de raționament. Vrem să demonstrăm că $P(n)$ este adevărată și presupunem că $P(n)$ este adevărată. Este numai o aparență, căci în etapa a doua se demonstrează o implicație arătîndu-se că în cazurile în care, *eventual*, $P(n)$ este adevărată și $P(n+1)$ este adevărată.

Pentru verificarea implicației de la punctul (2) se exprimă întîi $P(n+1)$, înlocuindu-se n cu $n+1$ și apoi se caută „prelucrări" ale lui $P(n)$, astfel încît din $P(n)$ să rezulte $P(n+1)$. Problemele care urmează vor fi astfel selectate încît să ilustreze cît mai bine tehnica demonstrației prin recurență, fără a fi necesare cunoștințe foarte specializate din alte capitole.

I. Egalități

Menționăm că în problemele în care apar sume al căror număr de termeni depinde de n este foarte important pentru stabilirea lui $P(n)$ și $P(n+1)$ să știm cîți termeni are suma corespunzătoare în $P(n)$. În toată această parte $n \in \mathbf{N}$.

Exerciții

1) *Să se arate că pentru orice $n \geqslant 1$ avem:*

$$1^2 - 2^2 + 3^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

Soluție. Notăm cu $P(n)$ egalitatea din enunț. Membrul sting al egalității conține n termeni.

Avem: $P(1): 1^2 = (-1)^0 \cdot \frac{1 \cdot 2}{2}$, adică $1 = 1$.

$P(1)$ este adevărată.

Avem: $P(n+1)$:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2 + (-1)^n(n+1)^2 = \frac{(-1)^n(n+1)(n+2)}{2}.$$

Fie $P(n)$ adevărată, adică:

$$1^2 - 2^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}. \quad \text{(a)}$$

Adunînd în ambii membri ai egalității (a) pe $(-1)^n(n+1)^2$ (această adunare este sugerată de forma lui $P(n+1)$), obținem:

$$1^2 - 2^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2 + (-1)^n(n+1)^2 =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2} + (-1)^n(n+1)^2 = (-1)^{n-1}(n+1)\frac{n}{2} -$$

$$- (-1)^{n-1}(n+1)^2 = (-1)^{n-1}(n+1)\frac{(-n-2)}{2} =$$

$$= (-1)^{n-1}(n+1)\cdot(-1)\frac{(n+2)}{2} = \frac{(-1)^n(n+1)(n+2)}{2}, \text{ adică } P(n+1).$$

Așadar, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

2) *Fie* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. *Să se calculeze* A^n.

Soluție. a) *Inducția.* Avem:

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}.$$

Ni se sugerează propoziția $P(n)$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

b) *Demonstrația prin inducție completă.* Propoziția $P(1)$ este adevărată.

Dacă $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$, atunci $A^{n+1} = A^n\cdot A = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$.

Deci $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

3) *Fie matricea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Să se calculeze* A^n.

Soluţie. a) *Inducţia.* Avem:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observînd că elementele 1, 3, 6, 10 (din linia întîia şi coloana a treia) se pot scrie $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$, $3 = \frac{2 \cdot 3}{2}$, $6 = \frac{3 \cdot 4}{2}$, $10 = \frac{4 \cdot 5}{2}$ ni se sugerează următoarea propoziţie:

$$P(n): \text{„}A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{(n-1)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\text{“}.$$

b) *Demonstraţia prin inducţie completă.* Propoziţia $P(1)$ este, evident, adevărată.

Propoziţia $P(n+1)$ este „$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$“.

Să presupunem că $P(n)$, adică egalitatea:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{(n-1)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ este adevărată.

Avem $A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

adică $P(n+1)$ şi deci $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

4) *Să se afle derivatele de ordinul n ale următoarelor funcţii :*

(1) $f_1(x) = x^\alpha$; $(x > 0$ şi $\alpha \neq 0)$

(2) $f_2(x) = \ln(1 + x)$; $x > -1)$

(3) $f_3(x) = e^{\alpha x}$ $(\alpha \neq 0)$.

Soluţie. (1) a) *Inducţia.* Avem :

$$f_1'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$
$$f_1''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$$
$$f_1'''(x) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)x^{\alpha-3}.$$

Ni se sugerează propoziţia $P(n): f_1^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)x^{\alpha-n}$.

b) *Demonstraţia prin inducţie completă.* Propoziţia $P(1)$ este adevărată.

Propoziţia $P(n + 1)$ este : $f_1^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha - 1) - (\alpha - n + 1)(\alpha - n)x^{\alpha-n-1}$.

Să presupunem că propoziţia $P(n)$, adică egalitatea $f_1^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)x^{\alpha-n}$ este adevărată.

Avem : $f_1^{(n+1)}(x) = [f_1^{n}(x)]' = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)(\alpha - n)x^{\alpha-n-1}$, adică $P(n + 1)$. Deci $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$.

În mod analog se demonstrează :

$$f_2^{n}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad \text{şi} \quad f_3^{n}(x) = \alpha^n e^{\alpha x}.$$

II. Inegalităţi

Cel mai adesea inegalităţile care se verifică prin metoda inducţiei complete se prezintă sub formă $a_n \leqslant b_n P(n)$. Trecerea de la $P(n)$ la $P(n + 1)$ se face de obicei în modul următor. Se demonstrează că din $a_n \leqslant b_n$ rezultă $a_{n+1} \leqslant c_{n+1}$. Se verifică în continuare că $c_{n+1} \leqslant b_{n+1}$. Ţinînd seama că $a_{n+1} \leqslant c_{n+1}$, şi $c_{n+1} \leqslant b_{n+1}$, aplicînd proprietatea de tranzitivitate a relaţiei de ordine, rezultă $a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$, adică $P(n + 1)$. Consideraţiile rămîn valabile dacă se înlocuieşte semnul $\leqslant$ cu semnul $<$, sau semnul $\geqslant$, sau semnul $>$.

Exerciţii

1) *Să se arate că oricare ar fi numărul natural* $n \geqslant 4$, *avem* $2^n \geqslant n^2$.

Soluţie. Propoziţia $P(4)$ este $2^4 \geqslant 4^2$ şi este adevărată.

Propoziţia $P(n + 1)$ este : $2^{n+1} \geqslant (n + 1)^2$.

Să presupunem că propoziția $P(n)$ este adevărată, adică $2^n \geqslant n^2$. Înmulțind ambii membri ai acestei inegalități cu 2, obținem $2^{n+1} \geqslant 2n^2$. Vom demonstra că $2n^2 \geqslant (n+1)^2$, adică $n^2 - 2n - 1 \geqslant 0$. Rădăcinile ecuației $n^2 - 2n - 1 = 0$ sînt $n_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Cum $n \geqslant 4$ și $4 > 1 + \sqrt{2}$, rezultă $n > 1 + \sqrt{2}$ și deci n este în afara rădăcinilor. Rezultă $n^2 - 2n - 1 \geqslant 0$, adică $2n^2 \geqslant (n+1)^2$. Din $2^{n+1} \geqslant 2n^2$ și $2n^2 \geqslant (n+1)^2$, rezultă $2^{n+1} \geqslant (n+1)^2$, adică $P(n+1)$. Deci $P(n) \Rightarrow$ $\Rightarrow P(n+1)$.

2) *Să se demonstreze că oricare ar fi numărul natural $n \geqslant 1$ avem:*

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < \frac{5n-2}{2n}.$$

Soluție. Propoziția $P(1)$ este $\frac{1}{1!} < \frac{5 \cdot 1 - 2}{2}$ și este adevărată.

Propoziția $P(n+1)$ este:

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n+3}{2n+2}.$$

Să presupunem că propoziția $P(n)$, adică inegalitatea din enunț, este adevărată. Adunînd în ambii membrii pe $\frac{1}{(n+1)!}$ obținem:

$$\text{(a)} \quad \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n-2}{2n} + \frac{1}{(n+1)!}.$$

Vom arăta acum că:

$$\text{(b)} \quad \frac{5n-2}{2n} + \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n+3}{2n+2}.$$

Inegalitatea (b) este echivalentă cu inegalitățile

$$\frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n+3}{2n} - \frac{5n-2}{2n+2}, \qquad \frac{1}{(n-1)!} < \frac{10n+1}{2},$$

$$\frac{1}{(n+1)!} < \frac{10n+1}{2n(n+1)}, \qquad \frac{1}{(n-1)!} < 5n + \frac{1}{2}.$$

Ultima inegalitate este adevărată căci $\frac{1}{(n-1)!} \leqslant 1$ (este subunitar sau 1), iar $5n + \frac{1}{2} > 1$ (este supraunitar) și deci inegalitatea (b) este adevărată.

Din (a) și (b), rezultă

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n+3}{2n+2}, \text{ adică } P(n+1).$$

Deci $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

III. Probleme de divizibilitate

Pentru rezolvarea problemelor de divizibilitate reamintim următoarele propoziții.

D1. Numărul natural $b \neq 0$, divide numărul natural a (se scrie $b \mid a$), *dacă există un număr natural k astfel încît $a = bk$.*

D2. Fie a, b, d trei numere natural ($d \neq 0$).

Dacă $d \mid a$ și $d \mid b$, atunci $d \mid (a \pm b)$.

D3. Fie a, b două numere naturale și p un număr natural prim. Dacă $p \mid ab$, atunci $p \mid a$ sau $p \mid b$.

Exerciții

1) *Să se arate că oricare ar fi numărul natural $n \geqslant 1$, 9 divide pe $4^n + 15n - 1$.*

Soluție. Notăm cu $P(n)$ propoziția „$9 \mid 4^n + 15n - 1$". Aceasta înseamnă că există $k \in \mathbf{N}$, astfel încît $4^n + 15n - 1 = 9k$.

Propoziția $P(1)$ este „$9 \mid 4 + 15 - 1$" și este adevărată.

Propoziția $P(n+1)$ este „$9 \mid 4^{n+1} + 15(n+1) - 1$" adică „$9 \mid 4^{n+1} + 15n + 14$". Presupunînd $P(n)$ adevărată, deducem $4^n = 9k - 15n + 1$ și ținînd seama că $4^{n+1} + 15n + 14 = 4^n \cdot 4 + 15n + 14$, rezultă: $4^{n+1} + 15n + 14 = (9k - 15n + 1)4 + (15n + 14 = 9 \cdot 4k - 45n + 18 = 9(4k - 5n + 2)$, adică $4^{n+1} + 15n + 14$ se divide cu 9 și deci avem $P(n+1)$. Așadar, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

2) *Să se demonstreze că oricare ar fi numărul natural prim p și oricare ar fi numărul natural $n \geqslant 1$, $p \mid (n^p - n)$.*

Soluție. Vom raționa prin recurență asupra lui n.

Notăm cu $P(n)$ propoziția „$p \mid (n^p - n)$".

Propoziția $P(1)$ este „$p \mid (1 - 1)$" și este adevărată.

Propoziția $P(n+1)$ este „$p \mid (n+1)^p - (n+1)$".

Să presupunem că $P(n)$ este adevărată. Aceasta înseamnă că există $k \in \mathbf{N}$, astfel încît $n^p - n = kp$.

Avem, ținînd seama de formula binomului lui Newton:

$$(n+1)^p - (n+1) = n^p + C_p^1 n^{p-1} + C_p^2 n^{p-2} + \ldots + C_p^{p-1} n +$$
$$+ 1 - n - 1 = n^p - n + C_p^1 n^{p-1} + C_p^2 n^{p-2} + \ldots +$$
$$+ C_p^{p-1} n = n^p - n + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k n^{p-k} = n^p - n + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!}.$$

Reținem: $1 \leqslant k < p$.

Numerele C_p^k sînt numere naturale și cum $p > k$, deducem că toți factorii primi ai lui $k!$ sînt mai mici decît p și deci nu divid numărul prim p. Rezultă că numerele $\frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)}{k!}$, pe care le vom nota cu α_k sînt numere întregi.

Rezultă:

$$(n+1)^p - (n+1) = n^p - n + p\sum_{k=1}^{k-1} \frac{(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!} =$$
$$= kp + p\sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k = p\left(k + \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k\right).$$

Aceasta înseamnă că $p \mid (n+1)^p - (n+1)$, adică avem $P(n+1)$. Deci $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Observație. Dacă p nu divide pe n (n și p sînt prime între ele) atunci $p \mid (n^{p-1} - 1)$ (Teorema lui Fermat).

Într-adevăr, dacă $p \mid (n^p - n)$, adică $p \mid n(n^p - 1)$ și $p \nmid n$, atunci

$$p \mid (n^{p-1} - 1).$$

§ 2. VARIANTA 2

(vezi manualul de algebră pentru clasa a X-a)

Fie $P(n)$, $n \geqslant a$ un predicat.

Dacă

1. *$P(a)$ este adevărată* și
2. *oricare ar fi $k \in N$, astfel încît $a \leqslant k \leqslant n$, implicația $P(k) \rightarrow P(n+1)$ este adevărată,*

atunci, oricare ar fi $n \geqslant a$, $P(n)$ este adevărată.

Exerciții

1) *Să se determine funcțiile* $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ *care îndeplinesc condițiile:*

a) $f(p) = p$, *dacă* p *este prim,*

b) $f(nm) = f(n) \cdot f(m)$, *oricare ar fi* $n, m \in \mathbf{N}^*$.

Soluție. Inducția. Înlocuind în relația (b) pe n cu 1 și pe m cu 1, obținem $f(1) = f^2(1)$. Deoarece $f(1) \neq 0$, rezultă $f(1) = 1$. Ținînd seama de (a), deducem $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $f(5) = 5$ etc.

Folosind (b) obținem $f(4) = f(2) \cdot f(2) = 4$, $f(6) = f(2 \cdot 3) = f(2) \cdot f(3) = 6$.

Ni se sugerează propoziția $P(n)$: „$f(n) = n$" $(n \geqslant 1)$.

Demonstrația prin inducție completă. Propoziția $P(1)$, adică $f(1) = 1$ este adevărată.

Să presupunem că propoziția $P(k)$, adică $f(k) = k$, este adevărată oricare ar fi k, astfel încît $1 \leqslant k \leqslant n$.

Dacă $n + 1$ este prim, atunci $f(n + 1) = n + 1$, adică avem $P(n + 1)$.

Dacă $n + 1$ nu este prim, există $1 < k_1 < n + 1$ și $1 < k_2 < n + 1$, astfel încît $n + 1 = k_1 k_2$. Deoarece $k_1 \leqslant n$ și $k_2 \leqslant n$, avem $f(k_1) = k_1$ și $f(k_2) = k_2$ și deci $f(k_1 \cdot k_2) = f(k_1) \cdot f(k_2)$ (condiția (b)). Rezultă $f(n + 1) = k_1 \cdot k_2 = n + 1$, adică $P(n + 1)$. Așadar, implicația $P(k) \to P(n + 1)$ este adevărată oricare ar fi k, astfel încît $1 \leqslant k \leqslant n$.

Demonstrația arată că dacă există o funcție $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$, care îndeplinește condițiile a) și b) din enunțul problemei atunci aceasta este funcția $f(n) = n$. Cum această funcție verifică condițiile a) și b), rezultă că singura funcție $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$, care verifică aceste condiții este funcția $f(n) = n$.

2) *Să se determine funcțiile* $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$, *care îndeplinesc condițiile:*

a) $f(k_1 \cdot k_2) = f(k_1) \cdot f(k_2)$, *pentru orice* $k_1 \in \mathbf{N}^*$ *și* $k_2 \in \mathbf{N}^*$;

b) $k_1 < k_2 \Rightarrow f(k_1) < f(k_2)$;

c) $f(2) = 2$.

Soluție. Inducția. Din condiția a), în care facem $k_1 = 1$ și $k_2 = 1$ obținem $f(1) = f^2(1)$ și cum $f(1) \neq 0$ o deducem $f(1) = 1$. Condiția c) ne dă $f(2) = 2$.

Dacă în condiția a) facem $k_1 = k_2 = 2$ obținem $f(4) = f(2) \cdot f(2) = 4$. Ținînd seama de condiția b), avem $2 < 3 < 4$, $f(2) < f(3) < f(4)$, adică $2 < f(3) < 4$. Rezultă $f(3) = 3$.

Ni se sugerează propoziția $P(n)$: „$f(n) = n$".

Demonstrația prin inducție completă. Propoziția $P(1)$, adică $f(1) = 1$ este adevărată.

Să presupunem că propoziția $P(k)$, adică $f(k) = k$, este adevărată pentru orice k, astfel încît $1 \leqslant k \leqslant n$.

Dacă $n + 1$ este par, atunci există k, astfel încît $1 \leqslant k \leqslant n$ și $n + 1 = 2k$. Rezultă $f(n + 1) = f(2k) = f(2)f(k) = 2k = n + 1$.

Dacă $n + 1$ este impar, atunci există k, astfel încît $2k < n + 1 < 2k + 2$, adică $n + 1 = 2k + 1$. Deducem că $f(2k) < f(n + 1) < f(2k + 2)$, adică $2k < f(n + 1) < 2k + 2$ și deci $f(n + 1) = 2k + 1 = n + 1$. Așadar implicația $P(k) \to P(n + 1)$ este adevărată pentru orice k, astfel încît $1 \leqslant k \leqslant n$.

§ 3. VARIANTA 3

Fie a și k două numere naturale fixate și $n \in \mathbf{N}$.
Dacă

1. *propozițiile $P(a)$, $P(a + 1)$, ..., $P(a + k)$ sînt adevărate* și
2. *implicația $P(n) \to P(n + k)$ este adevărată pentru orice $n \geqslant a$, atunci propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geqslant a$.*

Exerciții

1) *Să se arate că orice număr natural $n \geqslant 2$, poate fi scris sub forma $n = 2k_1 + 3k_2$, unde $k_1 \in \mathbf{N}$ și $k_2 \in \mathbf{N}$.*

Soluție. Notăm cu $P(n)$ propoziția din enunț.

Propozițiile $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$ sînt adevărate căci:

$$2 = 2\cdot 1 + 3\cdot 0 \ (k_1 = 1,\ k_2 = 0)$$
$$3 = 2\cdot 0 + 3\cdot 1 \ (k_1 = 0,\ k_2 = 1)$$
$$4 = 2\cdot 2 + 3\cdot 0 \ (k_1 = 2,\ k_2 = 0)$$
$$5 = 2\cdot 1 + 3\cdot 1 \ (k_1 = 1,\ k_2 = 1)$$
$$6 = 2\cdot 0 + 3\cdot 2 \ (k_1 = 0,\ k_2 = 2).$$

Vom demonstra în continuare că implicația $P(n) \to P(n + 5)$ este adevărată pentru orice $n \geqslant 2$.

Propoziția $P(n + 5)$ este: „$n + 5 = 2k_1' + 3k_2'$, unde $k_1' \in \mathbf{N}$ și $k_2' \in \mathbf{N}$.

Dacă propoziția $P(n)$ este adevărată, adică $n = 2k_1 + 3k_2$, atunci $n + 5 = 2k_1 + 3k_2 + 5 = 2k_1 + 3k_2 + 2 + 3 = 2(k_1 + 1) + 3(k_2 + 1) = 2k_1' + 3k_2'$, unde $k_1 = k_1 + 1$ și $k_2' = k_2 + 1$. Deci $P(n) \Rightarrow (Pn + 5)$.

2) *Să se arate că pentru orice număr natural n, există m numere naturale $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ cu proprietatea că $\varepsilon_k \in \{-1; 1\}$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$, astfel că $n = \varepsilon_1 \cdot 1^2 + \varepsilon_2 2^2 + \ldots + \varepsilon_m m^2$ (1)*

Soluție. Notăm cu $P(n)$ propoziția din enunț.

Propozițiile $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ și $P(3)$ sînt adevărate căci:

$$0 = 1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2$$

$$1 = 1^2$$

$$2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$$

$$3 = -1^2 + 2^2.$$

Vom arăta în continuare că implicația $P(n) \Rightarrow P(n + 4)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbf{N}$. În acest scop, vom ține seama că $4 = (m + 1)^2 - (m + 2)^2 - (m + 3)^2 + (m + 4)^2$. Să presupunem că $P(n)$ este adevărată, adică $n = \varepsilon_1 1^2 + \varepsilon_2 2^2 + \ldots + \varepsilon_m m^2$. Rezultă:

$$n + 4 = \varepsilon_1 1^2 + \varepsilon_2 2^2 + \ldots + \varepsilon_m m^2 + 4 = \varepsilon_1 1^2 + \varepsilon_2 2^2 +$$

$$+ \ldots + \varepsilon_m m^2 + (m + 1)^2 - (m + 2)^2 - (m + 3)^2 + (m + 4)^2,$$

adică $P(n + 4)$. Deci

$$P(n) \Rightarrow P(n + 4).$$

§ 4. ȘIRURI DEFINITE PRIN RECURENȚĂ

I. Definiții prin recurență

Fie S o mulțime de numere naturale consecutive (de cele mai multe ori $S = \mathbf{N}$ sau $S = \mathbf{N}^*$). Vom spune că un șir $(x_n)_{n \in S}$ este definit prin recurență dacă sînt dați un număr de termeni consecutivi de la începutul șirului și o relație (numită relația de recurență) cu ajutorul căreia putem afla orice termen al șirului, în mod unic, dacă se cunosc termenii precedenți.

Exemple: 1) *Fie M o mulțime pe care este definită o lege de compoziție internă notată cu* $*$.

Definim compusul $x_1 * x_2 * \ldots * x_n$ prin relațiile:

a) $x_1 * x_2 = x_1 * x_2$;

b) $x_1 * x_2 * \ldots * x_{n+1} : (x_1 * x_2 * \ldots * x_n) * x_{n+1}$.

2) Fie $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ un șir de mulțimi.

a) Definim șirul $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $X_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ în modul următor:

1. Pentru $n = 1$, $X_1 = A_1$ și

2. $\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k = A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}$.

b) Definim şirul $(X_n)_{n\in N}$, $X_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ în modul următor:

1. Pentru $n = 1$, $X_1 = A_1$ şi $k = 1$.

2. $\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k = (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \cap A_{n+1}$.

3) *Definim şirul $(x_n)_{n\in N}$ de numere reale în modul următor:*

1. $x_0 = a$;

2. $x_{n+1} = x_n + a^2x_n^2$.

4) *Definim şirul $(x_n)_{n\in N}$ de numere reale în modul următor:*

1. $x_0 = a$, $x_1 = b$;

2. $x_n + 2 = x_{n+1} + x_n$.

5) *Definiţia progresiei aritmetice. Un şir de numere reale $(x_n)_{n\in N}$ se numeşte progresia aritmetică dacă:*

1. $x_0 = a$;

2. $x_{n+1} = x_n + r$ (numărul real r se numeşte *raţie*).

6) *Definiţia progresiei geometrice. Un şir de numere reale $(x_n)_{n\in N}$, se numeşte progresie geometrică dacă*

1. $x_0 = a$;

2. $x_{n+1} = x_nq$ (numărul real q se numeşte *raţie*).

II. Probleme în legătură cu şirurile definite prin recurenţă

1. a) Fie $(x_n)_{n\in N}$ o progresie aritmetică cu raţia r şi $x_0 = a$ (exemplul 5)). Să se exprime x_n în funcţie de a şi r.

b) Aceeaşi problemă dacă $(x_n)_{n\in N}$ este o progresie geometrică cu raţia q.

a) *Inducţia.* Avem:

$x_1 = x_0 + r = a + r$;

$x_2 = x_1 + r = a + r + r = a + 2r$;

$x_3 = x_2 + r = a + 2r + r = a + 3r$.

S-ar părea că $x_n = a + nr$ (propoziţia $P(n)$).

Demonstraţia prin inducţie completă. Propoziţia $P(0)$ este adevărată.

Propoziţia $P(n+1)$ este $x_{n+1} = a + (n+1)r$.
Fie $x_n = a + nr$. Cum $x_{n+1} = x_n + r$,
rezultă:

$$x_{n+1} = a + nr + r = a + (n+1)r, \text{ adică } P(n+1).$$

b) Raţionînd în mod analog ca la punctul a) obţinem $x_n = a \cdot q^n$.

2. *Să se studieze convergenţa şirului de numere reale* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *definit astfel:*

1°. $x_0 = \sqrt{2}$;

2°. $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, *oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$.

a) *Monotonia. Inducţia.* Avem $x_0 = \sqrt{2}$, $x_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ etc. Se observă că $x_0 \leqslant x_1$ şi $x_1^2 = 2 + \sqrt{2}$, $x_2^2 = 2 + \sqrt{2+\sqrt{2}}$. Rezultă $x_1^2 \leqslant x_2^2$, căci $2 + \sqrt{2} \leqslant 2 + \sqrt{2+\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}}$ şi deci $x_1 \leqslant x_2$. S-ar părea că şirul este monoton crescător, adică $x_n \leqslant x_{n+1}$ $(P(n))$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Demonstraţia prin inducţie completă. Propoziţia $P(0)$, adică $x_0 \leqslant x_1$, este adevărată.

Propoziţia $P(n+1)$ este $x_{n+1} \leqslant x_{n+2}$.
Să presupunem că propoziţia $P(n)$ este adevărată, adică $x_n \leqslant x_{n+1}$.
Deducem $x_n + 2 \leqslant x_{n+1} + 2$. Rezultă $\sqrt{x_n + 2} \leqslant \sqrt{x_{n+1} + 2}$, adică $x_{n+1} \leqslant x_{n+2}$.
Deci $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

b) *Mărginirea. Inducţia.* Observăm că $x_0 \leqslant 2$, $x_1^2 = 2 + \sqrt{2} \leqslant 4$ şi deci $x_1 \leqslant 2$. De asemenea $x_2^2 = 2 + \sqrt{2+\sqrt{2}} \leqslant 2 + 2$, adică $x_2 \leqslant 2$. S-ar părea că $x_n \leqslant 2$ $(P(n))$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.
Propoziţia $P(0)$ este adevărată.

Demonstraţia prin inducţie completă. Propoziţia $P(n+1)$ este $x_{n+1} \leqslant 2$.
Să presupunem că propoziţia $P(n)$ este adevărată, adică $x_n \leqslant 2$.
Rezultă $x_n + \sqrt{2 + x_n} \leqslant \sqrt{2+2} = 2$, adică $x_{n+1} \leqslant 2$. Deci $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Deoarece $x_n \in [0; 2]$ şirul este mărginit.

c) *Calculul limitei.* Şirul fiind monoton şi mărginit este convergent şi deci există $l = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$. Trecînd la limită în relaţia de recurenţă (relaţia (2) din enunţ) obţinem:

$$l = \sqrt{2 + l}. \text{ Rezultă } l = 2, \text{ adică } \lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

3. *Fie șirul de numere reale* $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *definit astfel:*

1°. $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

2°. $x_{n+1} = \dfrac{x_n + x_{n+1}}{2}$ $(n \geqslant 1)$.

Să se arate că $x_n = \dfrac{2}{3}\left[1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right]$, $n \geqslant 0$

(propoziția $P(n)$).

Soluție. Propozițiile $P(0)$, $P(1)$ sînt adevărate.

Propoziția $P(n+1)$ este $x_{n+1} = \dfrac{2}{3}\left[1 + \dfrac{(-1)^{n+2}}{2^{n+1}}\right]$.

Să presupunem că propoziția $P(k)$ pentru orice $k \in \mathbf{N}$, astfel încît $1 \leqslant k \leqslant n$, în particular propozițiile $P(n-1)$ și $P(n)$ sînt adevărate, adică

$$x_{n-1} = \frac{2}{3}\left[1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right] \text{ și } x_n = \frac{2}{3}\left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right].$$

Din condiția (2) deducem:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_n) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} + 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[1 + \frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+1}}\right].$$

Deci $P(k) \Rightarrow P(n+1)$, $k \leqslant n$. Cum $P(0)$ este adevărată, rezultă că $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

Observație. S-a aplicat varianta 2.

III. Integrale care se calculează prin recurență

1. *Fie șirul cu termenul general*

$$I_n = \int \sin^n x \, dx \,(n \in \mathbf{N}). \text{ Avem:}$$

a) $I_0 = \int \sin^0 x \, dx = \int dx = x$ *și* $I_1 = \int \sin x \, dx = -\cos x$;

b) *să se stabilească o relație de recurență între* I_n *și* I_{n-2} $(n \geqslant 2)$;

c) *să se calculeze* I_2 *și* I_3.

Soluție. b) Avem:

$$I_n = \int \sin^n x \, dx = \int \sin^{n-1} x \, \sin x \, dx.$$

Dacă $f(x) = \sin^{n-1} x$, $f'(x) = (n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos x$, $g'(x) = \sin x$, $g(x) = -\cos x$, atunci, aplicînd formula de integrare prin părți, obținem:

$$I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx =$$
$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x(1 - \sin^2 x) \, dx =$$
$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \sin^n x \, dx.$$

Deci $I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$.

Rezultă

$$nI_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2} \text{ și deci}$$

$$I_n = \frac{1}{n}[(n-1)I_{n-2} - \sin^{n-1} x \cos x]. \qquad \text{(A)}$$

c) Cunoscînd $I_0 = x$ și $I_1 = -\sin x$, formula (A) permite să calculăm orice integrală din șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ în funcție de termenii precedenți.

Pentru $n = 2$, avem $I_2 = \frac{1}{2}(I_0 - \sin x \cdot \cos x)$ adică $\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$.

Pentru $n = 3$, avem $I_3 = \frac{1}{3}[2I_1 - \sin^2 x \cos x] = \frac{1}{3}[-2 \cos x - \sin^2 x \cos x]$.

Propunem cititorului ca, după modelul acestui exercițiu să găsească o formulă pentru calculul integralei din șirul cu termenul general $J_n = \int \cos^n x \, dx$ $(n \in \mathbb{N})$.

2. *Fie șirul cu termenul general*

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} \quad (n \geqslant 1).$$

a) *Avem* $I_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$.

b) *Să se stabilească o formulă de recurență între* I_{n+1} *și* I_n.

c) *Să se calculeze* I_2.

Soluție. b) Fie $f(x) = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}$. Rezultă $f'(x) = -2n \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n+1}}$.

Dacă $g'(x) = 1$, atunci $g(x) = x$. Aplicînd formula de integrare prin părți obținem:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 \, dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} =$$
$$= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} - 2na^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}.$$

Rezultă $I_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n\,I_n - 2na^2 I_{n+1}$ şi deci:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left[\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n - 1)I_n\right].$$

c) Pentru $n = 1$, obţinem:

$$I_2 = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{x^2 + a^2} + I_1\right] \text{ şi deci}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right].$$

IV. Calculul unor sume

1. *Sume de forma*

$$\frac{1}{1\cdot(1 + m)} + \frac{1}{2(2 + m)} + \ldots + \frac{1}{n(n + m)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k + m)}.$$

$(k \in \mathbb{N}^*,\ m \in \mathbb{N}^*)$.

Ideea centrală a aflării sumelor menţionate este scrierea numărului $\frac{1}{k(k + m)}$ sub forma $\frac{A}{k} + \frac{B}{k + m}$ şi înlocuirea succesivă a lui k, cu $1, 2, \ldots, n$. Modul de lucru rezultă din următorul

Exemplu. *Să se calculeze suma:*

$$S = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n + 2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k + 2)}.$$

Soluţie. Fie $\frac{1}{k(k + 2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k + 2}$. Rezultă

$$\frac{1}{k(k + 2)} = \frac{k(A + B) + 2A}{k(k + 2)}$$

şi deci sistemul

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A = 1 \end{cases}$$. Deducem $A = \frac{1}{2}$ şi $B = -\frac{1}{2}$.

Rezultă $\frac{1}{k(k + 2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + 2}\right)$.

Înlocuind în ultima egalitate pe k cu $1, 2, 3, 4, n-2, n-1, n$ obținem egalitățile:

$$\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right) \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2\cdot 4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) \qquad (2)$$

$$\frac{1}{3\cdot 5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) \qquad (3)$$

$$\frac{1}{4\cdot 6}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) \qquad (4)$$

. . . .

$$\frac{1}{(n-2)n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right) \qquad (n-2)$$

$$\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right) \qquad (n-1)$$

$$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right). \qquad (n)$$

Adunînd membru cu membru cele n egalități, observăm că dacă dăm factor comun în membrul drept pe $\frac{1}{2}$, atunci $-\frac{1}{3}$ din (1) se reduce cu $\frac{1}{3}$ din (3), $-\frac{1}{4}$ din (2) se reduce cu $\frac{1}{4}$ din (4), $-\frac{1}{n}$ din $(n-2)$ se reduce cu $\frac{1}{n}$ din (n). Este foarte plauzibil că $-\frac{1}{5}$ din (3) se va reduce cu $\frac{1}{5}$ din (5), $-\frac{1}{6}$ din (4) se va reduce cu $\frac{1}{6}$ din (6), $\frac{1}{n-2}$ din $(n-2)$ se va reduce cu $-\frac{1}{n-2}$ din $(n-4)$ și $\frac{1}{n-1}$ din $(n-1)$ se va reduce cu $-\frac{1}{n-1}$ din $(n-3)$.

Așadar, prin sumare, obținem:

$$S=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\right].$$

Observație. Metoda folosită pentru aflarea sumei S s-ar părea că nu folosește metoda inducției complete și de aceea este denumită în unele cărți *„metoda directă"*. În realitate reducerile făcute se observă pe cîteva cazuri de la începutul șirului de egalități și se operează în tot șirul de egalități. Un raționament complet ar trebui făcut astfel:

„În ipoteza că reducerile observate se fac pînă la egalitatea (k), $1 \leqslant k \leqslant n$, atunci ele se fac pînă la egalitatea (n)". Acest fapt este însă atît de evident, încît în practică acest raționament se neglijează. Așa vom proceda și noi în continuare.

Propunem cititorilor, ca după modelul acestui exemplu să calculeze suma

$$S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

2. *Suma de forma* $S_k = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$.

Fie $n \in \mathbf{N}^*$ și $k \in \mathbf{N}$. Notăm

$S_k = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$. Avem:

$S_0 = 1^0 + 2^0 + \ldots + n^0 = 1 + 1 + \ldots + 1$ și deci

$$S_0 = n.$$

1°. Aflarea unei relații de recurență între S_k și $S_{k-1}, \ldots, S_1, S_0$ $(k \geqslant 0)$.

Conform formulei binomului lui Newton avem:

$$(x+1)^{k+1} = x^{k+1} + C_{k+1}^1 x^k + C_{k+1}^2 x^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k x + 1.$$

Înlocuind în această egalitate succesiv pe x cu $1, 2, 3, \ldots, m$ obținem

$$2^{k+1} = 1^{k+1} + C_{k+1}^1 1^k + C_{k+1}^2 \cdot 1^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k 1 + 1 \qquad (1)$$

$$3^{k+1} = 2^{k+1} + C_{k+1}^1 2^k + C_{k+1}^2 2^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k 2 + 1 \qquad (2)$$

$$4^{k+1} = 3^{k+1} + C_{k+1}^1 3^k + C_{k+1}^2 3^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k 3 + 1 \qquad (3)$$

. . . .

$$(n+1)^{k+1} = n^{k+1} + C_{k+1}^1 n^k + C_{k+1}^2 n^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k n + 1. \qquad (n)$$

Însumînd cele n egalități membru cu membru și ținînd seama că numerele $2^{k+1}, 3^{k+1}, \ldots, n^{k+1}$ se reduc și dînd factori comuni pe coloane obținem:

$$(n+1)^{k+1} = 1 + C_{k+1}^1 S_k + C_{k+1}^2 S_{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k S_1 + n.$$

Rezultă:

$$S_k = \frac{1}{C_{k+1}^1}[(n+1)^{k+1} - 1 - C_{k+1}^2 S_{k-1} - \dots - C_{k+1}^k S_1 - S_0].$$

2°. *Aflarea sumelor* S_1, S_2, S_3.

a) Dacă $k = 1$, obținem

$$S_1 = \frac{1}{C_2^1}[(n+1)^2 - 1 - S_0] = \frac{1}{2}[n^2 + 2n + 1 - 1 - n] =$$

$$= \frac{1}{2}(n^2 + n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Așadar $S_1 = 1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$

b) Dacă $k = 2$, obținem:

$$S_2 = \frac{1}{C_3^1}[(n+1)^3 - 1 - C_3^2 S_1 - S_0] = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n\right].$$

Rezultă:

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

c) Dacă $k = 3$, obținem:

$$S_3 = \frac{1}{C_4^1}[(n+1)^4 - 1 - C_4^2 S_2 - C_4^3 S_1 - S_0].$$

Făcînd calculele obținem:

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

În mod analog se calculează S_4, $S_5 \dots$ etc.

3. *Aplicații în legătură cu sumele* S_k

a) Să se calculeze suma

$$S = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1).$$

b) Să se calculeze suma :

$$S = 2\cdot 4 + 4\cdot 5 + \ldots + 2n(n+3) = \sum_{k=1}^{n} 2k(k+3).$$

c) $S = 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2).$

Soluție. a) Avem :

$$S = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} (k^2 + k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k =$$

$$= S_2 + S_1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

b) Avem :

$$S = \sum_{k=1}^{n} 2k(k+3) = \sum_{k=1}^{n} (2k^2 + 6k) = 2\sum_{k=1}^{n} k^2 + 6\sum_{k=1}^{n} k = 2S_2 + 6S_1.$$

c) Avem

$$S = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n} (k^3 + 3k^2 + 2k) = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{n} k = S_3 + 2S_2 + 2S_1.$$

Pentru punctele b) și c) calculele de detaliu le lăsăm pe seama cititorilor.

4. *Fie A_n și B_m două mulțimi finite, prima cu n elemente și a doua cu m elemente.*

Să se afle numărul funcțiilor $f : A_n \to B_m$.

Soluție. Fie $A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ și $B_m = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$.

Inducția. Dacă $n = 1$ și $A_1 = \{a_1\}$, atunci funcțiile definite pe B_m, cu valori în A_1 sînt $f_1(a_1) = b_1$, $f_2(a_1) = b_2$, $\ldots$, $f_m(a_1) = b_n$, deci sînt în număr de m.

Dacă $n = 2$ și $A_2 = \{a_1, a_2\}$, atunci funcțiile definite pe A_2 cu valori în B_m vor fi de forma:

$$\begin{aligned} g_1(a_1) &= b_1 = f_1(a_1) \\ g_1(a_2) &= b_1 \\ g_2(a_1) &= b_1 = f_1(a_1) \\ g_2(a_2) &= b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_n(a_1) &= g_1 = f_1(a_1) \\ g_m(a_2) &= b_m. \end{aligned}$$

Așadar, funcției f_1 îi „corespund“ m funcții definite pe A_2 cu valori în B_m. În mod analog se arată că fiecăruia dintre funcțiile $f_2, \ldots, f_m$ îi corespund m funcții definite pe A_2 cu valori în B_m. Evident că prin procedeul folosit epuizăm toate funcțiile definite pe A_2 cu valori în B_m. Avem, deci, m^2 funcții definite pe A_2, cu valori în B_m.

Ni se sugerează propoziția $P(n)$: „Numărul funcțiilor definite pe A_n cu valori în B_m este m^n“.

Demonstrația prin inducție completă. Propoziția $P(1)$ este adevărată. Să presupunem că avem m^n funcții definite pe A_n cu valori în B_m.

Fie $A_{n+1} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ și $f: A_n \to B_m$.

Funcției f îi corespund următoarele m funcții definite pe A_{n+1} cu valori în B_m.

$$\begin{aligned} h_1(a_1) &= f(a_1) \qquad & h_1(a_{n+1}) &= b_1; \\ h_1(a_2) &= f(a_2) & h_2(a_1) &= f(a_1) \\ &\ldots\ldots & &\ldots\ldots \\ h_1(a_m) &= f(a_n) & h_2(a_n) &= f(a_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2(a_{n+1}) &= b_2 \\ h_m(a_1) &= f(a_1) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ h_m(a_n) &= f(a_n) \\ h_m(a_{n+1}) &= b_m. \end{aligned}$$

Cum avem m^n funcții $f: A_n \to B_m$ înseamnă că vom avea $m \cdot m^n = m^{n+1}$ funcții definite pe A_{n+1} cu valori în B_m (evident că prin procedeul utilizat epuizăm toate funcțiile definite pe A_{n+1} cu valori în B_m). Deci $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

CAPITOLUL IV

ECUAȚII

§ 1. OBSERVAȚII ASUPRA ECUAȚIILOR ALGEBRICE ȘI A UNOR FUNCȚII POLINOMIALE

1.1. GENERALITĂȚI

Fie A una din mulțimile $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ sau $\mathbf{C}$. Mulțimea polinoamelor cu coeficienți din A va fi notată $A[X]$.

Numim ecuație algebrică cu coeficienți din A, orice ecuație de forma $p(x) = 0$, unde:

$$p = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in A[X].$$

Prin rezolvarea ecuației algebrice $p(x) = 0$, se înțelege determinarea tuturor numerelor $x \in B \supseteq A$, B fiind una din mulțimile $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ sau $\mathbf{C}$, pentru care se verifică egalitatea. Numerele x astfel determinate se numesc rădăcinile în B ale ecuației.

Deoarece oricare ar fi polinomul $p \in A[X]$, se poate defini o funcție polinomială:

$$f: B \to B,\ f(x) = p(x),$$

rădăcinile în B ale ecuației algebrice $p(x) = 0$ mai sînt numite și zerourile funcției f.

Exemple: 1) $p = 2X^2 - X - 3 \in \mathbf{Z}[X]$. *Să se rezolve ecuația* $p(x) = 0$:

a) în $\mathbf{Z}$,

b) în $\mathbf{Q}$.

În primul caz $A = B = \mathbf{Z}$. Cum $p(x) = 0$ se mai scrie $(x + 1)(2x - 3) = 0$, rezultă că ecuația are o singură rădăcină $x_0 = -1$.

În al doilea caz $A =$, $B = \mathbf{Q}$, deci ecuația are rădăcinile $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

2) $p = X^4 + (1 + 2\sqrt{2})X^2 - 2X + 3 \in \mathbf{R}[X]$. *Să se rezolve ecuația* $p(x) = 0$ *în* $\mathbf{R}$.

Observînd că $p(x) = (x^2 + \sqrt{2})^2 + (x - 1)^2$, deducem că egalitatea $p(x) = 0$ se verifică dacă și numai dacă avem $x^2 + \sqrt{2} = x - 1 = 0$, evident imposibil. Rezultă că ecuația $p(x) = 0$ nu are rădăcini în $\mathbf{R}$.

În legătură cu existența rădăcinilor unei ecuații algebrice reamintim **teorema** *fundamentală a algebrei*:

„Orice ecuație algebrică, cu coeficienți complecși, de grad mai mare sau egal cu 1, admite cel puțin o rădăcină în **C**".

Ca urmare se demonstrează că — în condițiile ipotezei teoremei fundamentale — numărul rădăcinilor complexe ale ecuației este egal cu gradul acesteia.

În general, rezolvarea ecuațiilor, întîlnite în diversele capitole prevăzute de programa analitică pentru predarea matematicii la clasele IX—XII, se reduce la rezolvarea ecuațiilor algebrice.

Definiție. *Fie* $A \subseteq B \subseteq \mathbf{C}$ *și funcția* $f: B \to \mathbf{C}$. *Orice număr* $x_0 \in A$, *pentru care se verifică egalitatea* $f(x_0)=0$, *se numește rădăcină sau soluție în* A, *a ecuației* $f(x) = 0$.

Exemplu: *Ecuația* $\frac{x^2+1}{x+1} + \frac{4}{x^2-1} - \frac{x^2-3}{2} = 0$ *are în* **R** *rădăcina* $x_0 = 3$, *iar în* **C** *are rădăcinile* $x_1 = 3$; $x_2 = i$; $x_3 = -i$.

Definiție. *Fie* E_1, E_2 *părți ale mulțimii* **C** *și funcțiile* $f: E_1 \to \mathbf{C}$, $g: E_2 \to \mathbf{C}$. *Ecuațiile* $f(x) = 0$ *și* $g(x) = 0$ *se zic echivalente pe* $E \subseteq E_1 \cap E_2$ *dacă au aceleași soluții în* E.

Pentru a pune în evidență echivalența celor două ecuații scriem:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0, \ x \in E.$$

Exemplu: *Ecuațiile* $x^2 - 1 = 0$ *și* $x - 1 = 0$ *sînt echivalente pe* $[0; +\infty)$.

Facem observația că în stabilirea echivalenței ecuațiilor avem în vedere că $f(x) = 0$ este o egalitate numerică, x fiind un număr din E.

Propoziție. *Fie* f, α, β *funcții definite pe* $E \subseteq \mathbf{C}$, *cu valori în* **C**. *În acest caz putem scrie:*

(1) $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + \alpha(x) = \alpha(x)$;

(2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \beta(x) \cdot f(x) = 0$, *dacă* $(\forall)\ x \in E$, $\beta(x) \neq 0$.

Demonstrarea acestor proprietăți este imediată dacă avem în vedere observația făcută mai înainte. În adevăr dacă $x_0 \in E$ este o soluție a ecuației $f(x) = 0$, din egalitățile numerice $f(x_0) = 0$ și $\alpha(x_0) = \alpha(x_0)$, deducem $f(x_0) + \alpha(x_0) = 0 + \alpha(x_0) = \alpha(x_0)$, deci x_0 este o soluție a ecuației $f(x) + \alpha(x) = \alpha(x)$. Rezultă că mulțimea soluțiilor ecuației $f(x) = 0$, în E, este inclusă în mulțimea soluțiilor în E ale ecuației $f(x) + \alpha(x) = \alpha(x)$. Reciproc, dacă x' este o soluție în E, a ecuației $f(x) + \alpha(x) = \alpha(x)$, din egalitățile numerice $f(x') + \alpha(x') = \alpha(x')$ și $\alpha(x') = \alpha(x')$ deducem $f(x') = 0$, ceea ce demonstrează incluziunea inversă

a celor două mulţimi de soluţii. Deducem astfel egalitatea dintre mulţimea soluţiilor ecuaţiei $f(x) = 0$ şi mulţimea soluţiilor ecuaţiei $f(x) + \alpha(x) = \alpha(x)$ şi cu aceasta afirmaţia (1) este demonstrată.

În mod analog se demonstrează şi afirmaţia (2).

Consecinţa 1°. *Fie ecuaţia* $A(x) + B(x) = 0$, $x \in E$. *Datorită proprietăţii* (1) *putem scrie:*

$A(x) + B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) + B(x) + (-B(x)) = -B(x)$, *de unde deducem:*

$A(x) + B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = -B(x)$, *ceea ce demonstrează că, trecînd dintr-o parte în alta a unei ecuaţii un termen cu semn schimbat ecuaţia obţinută este echivalentă cu ecuaţia iniţială.*

Exemplu: *Să se rezolve în* Z *ecuaţia* $4x^2 + 2(x - 1) = x(1 - 2x)$. Putem scrie pentru $x \in \mathbf{Z}$:

$$4x^2 + 2(x - 1) = x(1 - 2x) \Leftrightarrow 4x^2 + 2(x - 1) - x(1 - 2x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

Deci ecuaţia propusă nu are soluţii.

Consecinţa 2°. *Să considerăm ecuaţia* $\frac{A(x)}{N(x)} = 0$, $x \in E$. *Presupunem* $N(x) \neq 0$ *oricare ar fi* $x \in E$. *Prin aplicarea proprietăţii* (2), *rezultă* $\frac{A(x)}{N(x)} = 0 \Leftrightarrow N(x) \cdot \frac{A(x)}{N(x)} = 0$, *sau* $\frac{A(x)}{N(x)} = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$, *ceea ce justifică operaţia de „eliminare a numitorilor", la rezolvarea ecuaţiilor.*

Exemplu: *Să se rezolve în* R *ecuaţia:*

$$1 + \frac{3}{x - 1} - \frac{2}{x + 1} - \frac{6}{x^2 - 1} = 0.$$

Observînd că prima parte a ecuaţiei nu este definită pentru $x \in \{-1; 1\}$, putem scrie pentru $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 1\}$:

$$1 + \frac{3}{x - 1} - \frac{2}{x + 1} - \frac{6}{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)\left(1 + \frac{3}{x - 1} - \frac{2}{x + 1} - \frac{6}{x^2 - 1}\right) =$$
$$= 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Să considerăm funcţiile $f: A \to \mathbf{C}$, $g: A \to \mathbf{C}$ şi $E \subseteq A$. Dacă orice soluţie în E a ecuaţiei $f(x) = 0$ este şi soluţie a ecuaţiei $g(x) = 0$ rezultă că „$f(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0$". Deducem de aici că, rezolvînd ecuaţia $g(x) = 0$ mulţimea soluţiilor ecuaţiei $f(x) = 0$ este inclusă în mulţimea soluţiilor ecuaţiei $g(x) = 0$.

Exemplu: *Să se rezolve în* R *ecuația* $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = \sqrt{2}(x - 2)$.

Deoarece α, β sînt numere reale, avem $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$, implicația $\alpha^2 = \beta^2 \Rightarrow \alpha = \beta$ nefiind în general adevărată. Putem scrie pentru $x \in \mathbf{R}$:

$$\sqrt{x^2 - 4x + 5} = \sqrt{2}(x - 2) \Rightarrow (\sqrt{x^2 - 4x + 5})^2 = [\sqrt{2}(x - 2)]^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Ecuația $x^2 - 4x + 3 = 0$ are rădăcinile 1 și 3. Mulțimea soluțiilor ecuației inițiale fiind inclusă în mulțimea $\{1 ; 3\}$ stabilim, prin verificare, că singura soluție a acestei ecuații este $x = 3$.

1.2. ECUAȚII CU MAI MULTE NECUNOSCUTE

Fie submulțimile de numere complexe $E_1, E_2, \ldots, E_k$ și funcția $f: E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k \to \mathbf{C}$. Egalitatea

$$f(x ; y ; \ldots ; w) = 0$$

se numește ecuație cu k necunoscute, atașată funcției f.

A rezolva ecuația înseamnă a determina toate elementele de forma $(x, y, \ldots, w)$, ale produsului cartezian $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k$, pentru care egalitatea se verifică.

Dacă f este un polinom, gradul polinomului se numește și gradul ecuației.

Exemple: 1) *Dacă* $E_1 = E_2 = \mathbf{R}$, *ecuația* $2x - 3y = 5$ *se numește „ecuație de gradul întîi cu două necunoscute". Mulțimea soluțiilor acestei ecuații este*

$$\left\{\left(\alpha ; \frac{2\alpha - 5}{3}\right) \middle| \alpha \in \mathbf{R}\right\} \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

2) *Să se rezolve în* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ *ecuația* $2x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 1 = 0$.
Putem scrie, pentru $(x ; y) \in \mathbf{R}^2$:

$$2x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 + (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + y = 0) \wedge (x - 1 = 0) \Leftrightarrow (x = 1 ; y = -1).$$

Deci ecuația are o singură soluție $(1 ; -1)$.

3) *Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația*

$$10xy - 4x + 15y = 6.$$

Observînd că ecuaţia este echivalentă cu $(2x+3)(5y-2)=0$, rezultă că este necesar şi suficient să avem $x=-\frac{3}{2}$, sau $y=\frac{2}{5}$.

Dacă $x=-\frac{3}{2}$, evident y este arbitrar în C, şi dacă $y=\frac{2}{5}$, x este arbitrar în C.

Rezultă :

$$(x;y)\in\left\{\left(-\frac{3}{2};\mu\right)\middle|\mu\in\mathbb{C}\right\}\cup\left\{\left(\lambda:\frac{2}{5}\right)\middle|\lambda\in\mathbb{C}\right\}.$$

4) *Să se rezolve în numere întregi ecuaţia* $6x^2-7xy+2y^2=3$.

Deoarece $6x^2-7xy+2y^2=(3x-2y)(2x-y)$, obţinem ecuaţia echivalentă cu cea din enunţ $(3x-2y)(2x-y)=3$. Rezultă de aici că, a, b fiind două numere întregi astfel incît $ab=3$, sîntem conduşi la rezolvarea sistemului :

$$3x-2y=a;\ 2x-y=b,$$

a cărui soluţie este $(x=2b-a;\ y=3b-2a)$. Observînd că în condiţiile enunţului avem :

$$(a;b)\in\{(1;3);(3;1);(-1;-3);(-3;-1)\},$$

obţinem răspunsul :

$$(x;y)\in\{(5;7);(-1;-3);(-5;-7);(1;3)\}.$$

1.3. FUNCŢII OMOGENE

Fie polinomul, de două nedeterminate X, Y, cu coeficienţi complecşi :

$$p=a_1X^2+a_2XY+a_3Y^2,$$

ale cărui monoame au fiecare gradul doi în X şi Y. Acest polinom se numeşte *polinom omogen de gradul doi*, cu coeficienţi complecşi, în nedeterminatele X şi Y.

În general un polinom de k nedeterminate, X, Y, ..., W, cu coeficienţi în A, ale cărui monoame au fiecare gradul $n\geqslant 1$, se numeşte *polinom omogen de gradul n*.

Exemplu : $q=2X^4-X^3Y+Y^2Z^2+Z^4$,
este un polinom omogen de gradul 4, cu coeficienţi întregi, în nedeterminatele X, Y, Z.

Fie p un polinom omogen de gradul n, cu coeficienţi complecşi de k nedeterminate $X, Y, \ldots, W$. Un termen oarecare T al acestui polinom este de forma:

$$T = aX^{\alpha_1}Y^{\alpha_2}\ldots W^{\alpha_k},$$

unde $a \in \mathbf{C}$ şi $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n$. Înlocuind X cu hX, Y cu $hY, \ldots$ $\ldots W$ cu hW, acest termen devine:

$$T' = a(hX)^{\alpha_1}\cdot(hY)^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot(hW)^{\alpha_k} = a\cdot h^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k}X^{\alpha_1}\cdot Y^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot W^{\alpha_k} =$$

$$= ah^n X^{\alpha_1}Y^{\alpha_2}\ldots W^{\alpha_k} = h^n T.$$

Deci oricare ar fi termenul T al polinomului, obţinem $T' = h^n T$. Rezultă de aici o proprietate specifică polinoamelor omogene de gradul n şi anume:

$$q(hX; hY; \ldots; hW) = h^n q(X; Y; \ldots; W).$$

Prin analogie spunem că funcţia $f: E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k \to \mathbf{C}$ se zice omogenă de gradul n, dacă:

$$f(hx, hy, \ldots, hw) = h^n f(x, y, \ldots, w).$$

Exemplu: $f(x; y; z) = \dfrac{2x + y + z - \sqrt[3]{xyz}}{yz\sqrt{x} + xz\sqrt{y} + xy\sqrt{z}}$, $(x; y; z) \in \mathbf{R}_+^3$.

Deducem, pentru $h > 0$:

$$f(hx; hy; hz) = \frac{2hx + hy + hz - \sqrt[3]{h^3xyz}}{h^2yz\sqrt{hx} + h^2xz\sqrt{hy} + h^2xy\sqrt{hz}} = h^{-\frac{3}{2}} f(x; y; z),$$

deci funcţia f este omogenă de gradul $-\dfrac{3}{2}$.

1.4. FUNCŢII SIMETRICE

Funcţia $f: E^2 \to \mathbf{C}$ se zice simetrică dacă $f(x; y) = f(y; x)$, oricare ar fi $(x; y) \in E^2$.

Exemplu: $f(x; y) = \dfrac{1 - xy}{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}$, $(x; y) \in \mathbf{R}_+^2$.

În general, funcţia $f: E^k \to \mathbf{C}$ se zice *simetrică* în raport cu argumentele $x, y, \ldots, w$, dacă este simetrică în raport cu fiecare pereche dintre acestea.

Exemplu : $f(x\,;\ y\,;\ z) = (y+z)\sqrt[3]{x} + (x+z)\sqrt[3]{y} + (x+y)\sqrt[3]{z}$, $(x\,;\ y\,;\ z) \in \mathbb{C}^3$ *este simetrică în raport cu* x, y, z, deoarece este simetrică în raport cu y și z, în raport cu x și z, în raport cu x și y, adică :

$$f(x\,;\ z\,;\ y)=f(x\,;\ y\,;\ z),\ f(z\,;\ y\,;\ x)=f(x\,;\ y\,;\ z),\ f(y\,;\ x\,;\ z)=f(x\,;\ y\,;\ z).$$

Dacă $f(x\,;\ y\,;\ \ldots\,;\ w)$, $(x\,;\ y\,;\ \ldots\,;\ w) \in E$, este simetrică in raport cu argumentele $x, y, \ldots, w$, atunci oricare ar fi permutarea $x', y', \ldots, w'$ a acestora, avem :

$$f(x', y', \ldots, w') = f(x, y, \ldots, w).$$

Observații. 1°. Următoarele polinoame se numesc polinoame simetrice elementare de k nedeterminate X, Y, ..., W ;

$$p_1 = X + Y + \ldots + W$$
$$p_2 = XY + XZ + \ldots + TW$$
$$\vdots$$
$$p_k = XY\ldots W.$$

Spre exemplu pentru $k = 2$ se obțin $p_1 = X + Y$, $p_2 = XY$, pentru $k = 3$ se obțin $p_1 = X + Y + Z$, $p_2 = XY + YZ + ZX$, $p_3 = XYZ$ ș.a.m.d.

Se cunoaște teorema :

„Orice polinom simetric de nedeterminatele X, Y, ..., W, se exprimă cu ajutorul polinoamelor simetrice elementare ale acestor nedeterminate".

Aplicație. Dacă x, y, z sînt numere reale astfel încît $x + y + z \geq 0$, atunci

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz.$$

Observăm că putem scrie $(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3y^2z + 3yz^2 + 3x^2z + 3xz^2 + 3x^2y + 3xy^2 + 6xyz = (x^3 + y^3 + z^3) + 3yz(x+y+z) + 3xz(x+y+z) + 3xy(x+y+z) - 3xyz = (x^3 + y^3 + z^3) + 3(x+y+z)(xy+yz+zx) - 3xyz$.

Deci $p_1^3 = (x^3 + y^3 + z^3) + 3p_1p_2 - 3p_3$, de unde deducem :

$$x^3 + y^3 + z^3 = p_1^3 - 3p_1p_2 + 3p_3.$$

Deoarece $p_1^3 - 3p_1p_2 = p_1(p_1^2 - 3p_2) = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2 - yz - xz - xy) = \frac{1}{2}(x+y+z)[(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2] \geq 0$, rezultă $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$.

2°. Fie $f: E^k \to \mathbf{C}$ o funcţie simetrică de $x, y, \ldots, w$, unde $(x, y, \ldots, w) \in E^k$.

Rezultă că $(x, y, \ldots, w)$, fiind o soluţie a ecuaţiei $f(x, y, \ldots, w) = 0$, este, de asemenea, soluţie orice permutare a acesteia.

Exemplu: *Să considerăm funcţia polinomială* $f: \mathbf{Z}^3 \to \mathbf{Z}$, $f(x; y; z) = x + y + z - xyz$. Deoarece ecuaţia $f(x; y; z) = 0$ admite soluţia $(1; 2; 3) \in \mathbf{Z}$, datorită simetriei, deducem că sînt soluţii ale ecuaţiei în $\mathbf{Z}$ şi $(1; 3; 2)$; $(2; 1; 3)$; $(2; 3; 1)$; $(3; 1; 2)$; $(3; 2; 1)$.

§ 2. ECUAŢIA DE GRADUL ÎNTÎI

2.1. ECUAŢIA DE GRADUL ÎNTÎI CU O SINGURĂ NECUNOSCUTĂ

Forma generală a ecuaţiei de gradul întîi cu o singură necunoscută este $ax + b = 0$, unde $aX + b \in \mathbf{C}[X]$. Sînt posibile situaţiile:

(1) $a \neq 0$. În acest caz putem scrie succesiv $ax + b = 0 \Leftrightarrow a^{-1} \cdot (ax) + a^{-1} \cdot b = 0 \Leftrightarrow (a^{-1} \cdot a)x = -a^{-1}b \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}$, deci ecuaţia are soluţie unică.

(2) $a = 0$. Deoarece oricare ar fi $x \in \mathbf{C}$, avem $ax = 0$, rezultă că egalitatea $ax + b = 0$ nu este verificată dacă $b \neq 0$ şi este verificată, oricare ar fi $x \in \mathbf{C}$, dacă $b = 0$. În concluzie:

$a \neq 0$ — ecuaţia are soluţia unică $x = -\frac{b}{a}$;

$a = 0$, $b \neq 0$ — ecuaţia nu are soluţii;

$a = 0$, $b = 0$ — ecuaţia este identic verificată pe $\mathbf{C}$ (este nedeterminată).

Facem observaţia că ecuaţia $ax + b = 0$, are soluţie unică oricare ar fi $a \neq 0$ numai dacă coeficienţii a şi b aparţin unuia din corpurile numerice $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ sau $\mathbf{C}$.

Dacă $aX + b \in \mathbf{Z}[X]$, unde $(a; b) = 1$, ecuaţia $ax + b = 0$ are soluţie unică în $\mathbf{Z}$ dacă şi numai dacă — coeficientul a este 1 sau -1.

Exemple: 1) *Să se rezolve în* $\mathbf{R}$ *ecuaţia*:

$$\frac{1}{4(x+2)} + \frac{1}{x^2 - 4} = 0.$$

Observăm că pentru $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 2\}$ putem scrie:

$$\frac{1}{4(x+2)} + \frac{1}{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow (x - 2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \text{ — imposibil.}$$

Deci ecuaţia nu are soluţii.

2) *Să se rezolve în* **C** *ecuația:*

$$\frac{m}{x} - \frac{m-1}{x+1} = \frac{m(m-1)(x-1)}{2x(x+1)}, \qquad (1)$$

unde m este un parametru complex.

Oricare ar fi $x \in \mathbf{C} \setminus \{-1\,;\,0\}$, putem scrie:

$$\frac{m}{x} - \frac{m-1}{x+1} = \frac{m(m-1)(x-1)}{2x(x+1)} \Leftrightarrow 2m(x+1) - 2(m-1)x =$$

$$= m(m-1)(x-1) \Leftrightarrow (m+1)(m-2)x = m(m+1).$$

În cazurile de existență unică a soluției, din ultima ecuație deducem $x = m:(m-2)$. Deoarece $x \notin \{-1\,;\,0\}$, rezultă $m \notin \{0\,;\,1\}$. În concluzie, pentru ecuația (1), putem afirma:

1°. $m \in \mathbf{C} \setminus \{-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\}$ — ecuația are soluția unică $x = \frac{m}{m-2}$;

2°. $m \in \{0\,;\,1\,;\,2\}$ — ecuația nu are soluții;

3°. $m = -1$ — ecuația este nedeterminată, $x \in \mathbf{C} \setminus \{-1\,;\,0\}$.

Propunem ca în problemele referitoare la rezolvarea ecuațiilor să fie folosiți termenii: „ecuația are soluții", „ecuația nu are soluții", „ecuația este nedeterminată".

2.2. ECUAȚIA DE GRADUL ÎNTÎI CU DOUĂ SAU MAI MULTE NECUNOSCUTE

a) *Observații.* Forma generală a ecuației este:

$$ax + by + \ldots + lw = d, \qquad (2)$$

coeficienții aparținînd uneia din mulțimile **Z**, **Q**, **R**, **C**.

În general ecuațiile de tipul (2) sînt nedeterminate.

Exemple: 1) *Să se rezolve în* **R** *ecuația* $2x - 3y = 1$.

Dacă avem în vedere că pentru orice $x \in \mathbf{R}$, rezultă $y = \frac{(2x-1)}{3} \in \mathbf{R}$, deducem că mulțimea soluțiilor ecuației este:

$$\left\{\left(\lambda\,;\,\frac{2\lambda-1}{3}\right) \middle|\, \lambda \in \mathbf{R}\right\}.$$

2) *Să se rezolve în* **Q** *ecuația* $\sqrt{2}\cdot x + \sqrt{3}\cdot y = \sqrt{5}$. Dacă $(x_0 ; y_0) \in \mathbf{Q}^2$ este o soluție a ecuației, deducem:

$$\sqrt{2}x_0 + \sqrt{3}y_0 = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{2}x_0 = \sqrt{5} - \sqrt{3}y_0 \Rightarrow 2x_0^2 =$$

$$= 5 + 3y_0^2 - 2\sqrt{15}y_0 \Leftrightarrow 2\sqrt{15}y_0 = 5 + 3y_0^2 - 2x_0^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y_0 = 0 ;\ 5 + 3y_0^2 - 2x_0^2 = 0) \Leftrightarrow \left(y_0 = 0 ;\ x_0^2 = \frac{5}{2}\right).$$

Deoarece $x_0 \in \mathbf{Q}$ și $x_0^2 = \frac{5}{2}$ sînt incompatibile, rezultă că ecuația propusă nu are soluții.

b) Ecuații diofantice de gradul întîi cu două necunoscute

Ecuația

$$ax + by = c, \tag{3}$$

unde $a, b, c \in \mathbf{Z}$ și $(x ; y) \in \mathbf{Z}^2$ se numește *ecuație diofantică* de gradul întîi cu două necunoscute.* În cele ce urmează vom presupune $ab \neq 0$.

Propoziție. *Fie a și b două numere întregi prime între ele. Soluția generală* $(x ; y) \in \mathbf{Z}^2$, *a ecuației* $ax + by = 0$ *este:*

$$(x = \lambda b ;\ y = -\lambda a),\ \lambda \in \mathbf{Z}. \tag{4}$$

În adevăr dacă $(x_0 ; y_0) \in \mathbf{Z}^2$ este o soluție, avem $ax_0 = -by_0$, deci $b \mid ax_0$. Cum a și b sînt prime între ele, deducem $b \mid x_0$, adică $x_0 = \lambda_0 b$, $\lambda_0 \in \mathbf{Z}$. Înlocuind x_0 în ecuație, rezultă $a(\lambda_0 b) + by_0 = 0$, sau $y_0 = -a\lambda_0$. Deci soluția $(x_0 ; y_0)$ a ecuației, este de forma (4). În plus se verifică imediat că orice pereche de numere $x = \lambda b$, $y = -\lambda a$, cu $\lambda \in \mathbf{Z}$, este o soluție a ecuației din enunț.

Propoziție: *Soluția generală a ecuației* (3), *unde a și b sînt prime între ele, este:*

$$(x = x_1 + \lambda b ;\ y = y_1 - \lambda a),\ \lambda \in \mathbf{Z} \tag{4'}$$

$(x_1 ; y_1) \in \mathbf{Z}^2$ fiind o soluție oarecare a ecuației.

Înlocuind soluția (4') în ecuația (3), deducem $a(x_1 + \lambda b) + b(y_1 - \lambda a) = c \Leftrightarrow ax_1 + by_1 = c$, evident datorită ipotezei.

Fie acum $(x' ; y') \in \mathbf{Z}^2$ o soluție oarecare a ecuației (3), diferită de soluția $(x_1 ; y_1)$, deci $x' \neq x_1$ sau $y' \neq y_1$. Deducem $ax_1 + by_1 = c$, $ax' + by' = c$, de unde $a(x' - x_1) + b(y' - y_1) = 0$. Rezultă imediat $x' - x_1 = \lambda b$, $y' - y_1 = -\lambda a$, cu $\lambda \in \mathbf{Z}$, deci $x' = x_1 + \lambda b$; $y' = y_1 - \lambda a$ $(\lambda \in \mathbf{Z})$.

---

* Diofant din Alexandria (sec. III e.n.), în lucrarea Aritmetica, pune unele probleme care conduc la rezolvarea ecuațiilor în numere întregi.

În concluzie, dacă a și b sînt prime între ele, problema rezolvării ecuației diofantice (3) se reduce la problema găsirii unei soluții particulare $(x_1 ; y_1)$.

Propoziție. *Fie numerele întregi a, b, c și $d = (a ; b)$. Următoarele afirmații sînt echivalente :*

(1) *d nu divide c ;*

(2) *ecuația $ax + by = c$ nu admite soluții în $\mathbf{Z}$.*

Pentru a demonstra (1) $\Rightarrow$ (2), fie $d > 1$ și $a = da_1$, $b = db_1$. Dacă $(x_0 ; y_0) \in \mathbf{Z}^2$ este o soluție a ecuației, deducem $d(a_1x + b_1y) = c$, deci $d \mid c$, contradicție. Rezultă că ecuația nu admite soluții în numere întregi.

Implicația (2) $\Rightarrow$ (1) se demonstrează analog.

Exemple : 1) *Să se determine toate soluțiile $(x ; y) \in \mathbf{Z}^2$; cu $x > 0$, $y > 0$, ale ecuației* $29x + 12y = 1\,351$.

Indicăm aici un procedeu de aflare a unei soluții particulare a ecuației. Pentru aceasta să observăm că putem scrie, din ecuația propusă :

$$y = -\frac{1\,351 - 29x}{12}, \text{ sau } y = 112 - 2x - \frac{5x - 7}{12}.$$

Deoarece 5 este prim cu 12, rezultă că numerele $5 \cdot 0 ; 5 \cdot 1 ; 5 \cdot 2 ; \ldots ; 5 \cdot 11$, dau resturi diferite între ele la împărțirea prin 12. Prin urmare există $k \in \mathbf{Z}, 0 \leqslant k \leqslant 11$ astfel încît $5 \cdot k$ dă restul 7 la împărțirea prin 12. Prin încercări găsim $k = 11$. Putem deci pune $x_1 = 11$. Rezultă imediat $y_1 = 86$.

Deci soluția generală $(x ; y) \in \mathbf{Z}^2$, a ecuației propuse este :

$$(x = 11 + 12\lambda ; y = 86 - 29\lambda), \lambda \in \mathbf{Z}.$$

Deoarece $x > 0$, $y > 0$, avem și $-\frac{11}{12} < \lambda < \frac{86}{29}$, deci $\lambda \in \{0 ; 1 ; 2\}$.

Singurele soluții ale ecuației, care verifică toate condițiile enunțului sînt, prin urmare :

$$(x_1 = 11 ; y_1 = 86) ; (x_2 = 23 ; y_2 = 57) ; (x_3 = 35 ; y_3 = 28).$$

Facem observația că valori suficient de mari în modul ale coeficienților a și b fac anevoioasă problema găsirii soluției particulare $(x_1 ; y_1)$ a ecuației.

În următorul exemplu prezentăm un model de rezolvare, a ecuației diofantice de gradul întîi cu două necunoscute, prin „împărțiri succesive".

2) *Fie progresiile aritmetice:*

$$\div\, 12\,;\ 29\,;\ 46\,;\ \ldots \quad \text{și} \quad \div\, 11\,;\ 42\,;\ 73\,;\ \ldots.$$

Să se arate că mulțimea termenilor comuni ai celor două progresii alcătuiesc, de asemenea, o progresie aritmetică.

Fie $x_n = 12 + 17n$, $n \in \mathbf{N}$, respectiv $y_m = 11 + 31m$, $m \in \mathbf{N}$, termenul general al primei și al celei de a doua progresii. Problema aflării termenilor comuni conduce la rezolvarea ecuației diofantice $x_n = y_m$, cu $n, m \in \mathbf{N}$. Avem deci:

$$x_n = y_m \Leftrightarrow 12 + 17n = 11 + 31m \Leftrightarrow 31m - 17n = 1.$$

Se scoate necunoscuta cu coeficientul cel mai mic în modul:

$$n = \frac{31m - 1}{17}.$$

Putem scrie:

$$n = 2m - \frac{3m + 1}{17}.$$

Deoarece n și $2m$ sînt numere naturale, rezultă $\frac{3m+1}{17} = a \in \mathbf{Z}$, deci $m = \frac{17a - 1}{3} \Leftrightarrow m = 6a - \frac{a+1}{3}$. Raționînd analog, deducem $\frac{a+1}{3} = \lambda \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow a = 3\lambda - 1$. Deci $m = 17\lambda - 6$ și $n = 31\lambda - 11$. Deoarece m și n sînt numere naturale rezultă $\lambda \in \mathbf{N}^*$. Rezultă că termenii comuni celor două progresii sînt $x_n = x_{31\lambda-11} = 17(31\lambda - 11) + 12 = 527\lambda - 175$. Notînd $x_{31\lambda-11} = z_\lambda$, $\lambda \in \mathbf{N}^*$, șirul termenilor comuni ai celor două progresii, este:

$$(z_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{N}^*} = (352\,;\ 879\,;\ \ldots;\ 527\lambda - 175\,;\ \ldots).$$

În fine, deoarece $z_{\lambda+1} - z_\lambda = 527$, rezultă $(z_\lambda)_{\lambda\in\mathbf{N}^*}$ este o progresie aritmetică de rație $r = 527$.

3) *Să se determine toate progresiile aritmetice care îndeplinesc condiția că termenii de rang n, p și q sînt respectiv 2, 3 și 5 unde $n + p + q = 31$.*

Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, de rație r. Putem scrie:

$$\left.\begin{aligned} 2 &= a_1 + (n-1)r \\ 3 &= a_1 + (p-1)r \\ 5 &= a_1 + (q-1)r \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 1 = (p-n)r \\ 2 = (q-p)r \end{cases} \Rightarrow \frac{q-p}{p-n} = 2 \Leftrightarrow 2n - 3p + q = 0.$$

Din sistemul $2n - 3p + q = 0$; $n + p + q = 31$, deducem $n = 4p - 31$, $q = 62 - 5p$ și deoarece $n > 0$, $q > 0$, rezultă $\frac{31}{4} < p < \frac{62}{5}$, deci $p \in \{8\,;\ 9\,;\ 10\,;\ 11\,;\ 12\}$.

Se obțin rezultatele din tabelul alăturat.

Soluția	n	p	q	r	a_1
1°	1	8	22	1/7	2
2°	5	9	17	1/4	1
3°	9	10	12	1	−6
4°	13	11	7	−1/2	8
5°	17	12	2	−1/5	26/5

4) *Prețurile unitare pentru trei categorii de obiecte sînt* 13,50 *lei* ; 25,60 *lei și* 7,20 *lei. Cîte obiecte s-au cumpărat din fiecare categorie dacă s-au plătit* 2 350 *lei pentru un total de* 210 *obiecte ?*

Pentru rezolvare să notăm cu x, y și respectiv z numărul obiectelor cumpărate din fiecare categorie. Obținem ecuațiile :

$$13{,}5x + 25{,}6y + 7{,}2z = 2\,350$$

$$x + y + z = 210.$$

Eliminînd z între cele două ecuații deducem $63x + 184y = 8\,380$, cu $(x ; y) \in \mathbf{N}^2$. Deci

$$x = 133 - 3y + \frac{5y+1}{63},$$

de unde $\frac{5y+1}{63} = a \in \mathbf{N}$, sau $y = 13a - \frac{2a+1}{5}$. Rezultă $\frac{2a+1}{5} = b \in \mathbf{N}$, deci $a = 2b + \frac{b-1}{2}$ și prin urmare $\frac{b-1}{2} = \lambda \in \mathbf{N}$. Sîntem conduși astfel la $b = 2\lambda + 1$, ceea ce implică $a = 5\lambda + 2$, deci :

$$x = 60 - 184\lambda ; \; y = 63\lambda + 25.$$

Din ecuația $x + y + z = 210$ rezultă și $z = 125 + 121\lambda$.

Avînd în vedere condițiile : $0 \leqslant x \leqslant 210$, $0 \leqslant y \leqslant 210$, $0 \leqslant z \leqslant 210$ și $\lambda \in \mathbf{N}$, obținem $\lambda = 0$. Soluția problemei este $(x = 60 ;\; y = 25 ;\; z = 125)$.

Recomandăm ca exercițiu o problemă analoagă în care prețurile unitare sînt 8 lei, 12 lei și respectiv 25 lei, numărul total al obiectelor este 44, iar suma plătită 820 lei (Se găsește $x = 5$; $y = 15$; $z = 24$).

5) *Să se rezolve ecuația* $\cos\frac{2x}{3} = 2 + \cos^3\frac{x}{5}$.

Vom observa că ecuația propusă se mai scrie sub forma :

$$\cos\frac{2x}{3} - \cos^3\frac{x}{5} = 2,$$

și, avînd în vedere:

$$\left|\cos\frac{2x}{3}-\cos^3\frac{x}{5}\right|\leqslant\left|\cos\frac{2x}{3}\right|+\left|\cos^3\frac{x}{5}\right|\leqslant 2,$$

deducem cu necesitate:

$$\cos\frac{2x}{3}=1;\ \cos\frac{x}{5}=-1,$$

deci $\frac{2x}{3}=2k\pi$ și $\frac{x}{5}=\pi(2h+1)$, unde $k, h\in \mathbf{Z}$.

Sîntem astfel conduși la ecuația diofantică:

$$3k-10h=5\ (k, h\in \mathbf{Z}).$$

Deoarece

$$k=3h+2+\frac{h-1}{3},$$

putem pune $h-1=3m$, $m\in \mathbf{Z}$, deci $h=3m+1$.

Înlocuind în $x=5\pi(2h+1)$ obținem soluțiile ecuației: $x=15\pi(2m+1)$, $m\in \mathbf{Z}$.

§ 3. ECUAȚIA DE GRADUL DOI CU O SINGURĂ NECUNOSCUTĂ

Avem în vedere ecuațiile de forma $ax^2+bx+c=0$, coeficienții a, b, c aparținînd uneia din mulțimile $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ sau $\mathbf{C}$ și $a\neq 0$. Ne vom opri numai asupra cîtorva tipuri de probleme.

3.1. AFLAREA RĂDĂCINILOR COMUNE A DOUĂ ECUAȚII DE GRADUL DOI CU O SINGURĂ NECUNOSCUTĂ

În cazul ecuațiilor cu coeficienți numerici, rezolvarea problemei este imediată. În cazul ecuațiilor:

$$a_1x^2+b_1x+c_1=0,\ a_2x^2+b_2x+c_2=0, \tag{5}$$

cu coeficienți parametrici, prin eliminarea lui x între acestea, se obține condiția necesară și suficientă:

$$(a_1b_2-b_1a_2)(b_1c_2-c_1b_2)-(a_1c_2-c_1a_2)^2=0.$$

pentru ca ecuațiile să admită cel puțin o rădăcină comună. În practică acest procedeu ni se pare oarecum anevoios. Propunem ca problema să fie rezolvată considerînd ecuațiile (5) ca formînd un sistem ale cărui necunoscute sînt parametrul sau parametrii ce intervin în problemă și rădăcina comună.

Exemple: 1) *Să se determine* $m \in \mathbb{R}$, *știind că ecuațiile:* $(m-1)x^2 + (m+2)x - 3m = 0$ *și* $(m+1)x^2 - (m+2)x + m = 0$ *admit cel puțin o rădăcină comună în* $\mathbb{R}$.

Rezultă că trebuie să determinăm soluțiile $(m\,;\,x) \in \mathbb{R}^2$ ale sistemului format de cele două ecuații. Adunînd aceste ecuații, deducem $m(x^2 - 1) = 0$

Va trebui deci să rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases}(m+1)x^2 - (m+2)x + m = 0,\\ m(x^2-1) = 0.\end{cases}$$

Obținem soluțiile $(0\,;\,0)$, $(0\,;\,2)$, $(1\,;\,1)$, $(-1\,:\,-1)$. Deci pentru $m = 0$ ecuațiile au ambele rădăcini comune, pentru $m = 1$ ecuațiile au rădăcina comună $x = 1$ și pentru $m = -1$ ecuațiile au rădăcina comună $x = -1$.

1) *Să se stabilească pentru ce valori ale lui* $m \in \mathbb{R}$, *ecuațiile:*

$(5m+4)x^2 - 6x + (m-4) = 0$; $(m+1)x^2 - (m+2)x + m = 0$,

admit o singură rădăcină comună în $\mathbb{R}$.

Din ecuația a doua, a sistemului alcătuit de cele două ecuații, deducem:

$$m = \frac{-x^2 + 2x}{x^2 - x + 1}\ (x^2 - x + 1 \neq 0 \text{ pentru } x \in \mathbb{R}). \qquad (6)$$

Substituind m în prima ecuație a sistemului, obținem $x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+1)(x-1)(x-2) = 0$, deci $x = -2$ sau $x = -1$, sau $x = 1$, sau $x = 2$.

Înlocuind în (6) valorile obținute pentru x, rezultă că soluțiile $(m\,;\,x)$ ale sistemului sînt:

$$\left(-\frac{8}{7}\,;\,-2\right),\ (-1\,;\,-1),\ (1\,;\,1);\ (0\,;\,2).$$

Rezultă că pentru m luînd valorile $-\frac{8}{7}$, -1, 1, sau 0, ecuațiile admit ca rădăcină comună respectiv pe -2, -1, 1, 2. Facem în plus observația că din rezolvarea problemei rezultă că nu există valori ale lui m pentru care ecuațiile din enunț să admită ambele rădăcini comune.

3) *Dacă m, p, q sînt parametri reali, să se stabilească în ce condiții ecuațiile:*

$$(3mp + m + 2p)x^2 - 3px - (m + 2p) = 0;$$

$$(m + 2q + 1)x^2 - (m + 3q + 2)x + (3mq + m - 2q) = 0,$$

admit cel puțin o rădăcină comună.

Eliminînd m între cele două ecuații se obține ecuația:

$$(x + 1)(x - 1)(x - 2)[(6pq + p + 2q + 1)x + (3pq + p + q)] = 0,$$

de unde deducem $x = -1$, sau $x = 1$, sau $x = 2$, sau $x = -(3pq + p + q) : (6pq + p + 2q + 1)$. Înlocuind, pe rînd, valorile lui x în una din ecuațiile inițiale obținem răspunsul:

$x = -1$ este rădăcină comună dacă $m = -1$, sau $p = q + 1 = 0$;
$x = 1$ este rădăcină comună dacă $m = 1$, sau $p = 3q + 1 = 0$;
$x = 2$ este rădăcină comună dacă $m = 0$, sau $4p = q = -1$;
$x = -(3pq + p + q) : (6pq + p + 2q + 1)$ este rădăcină comună dacă

$$m = -\frac{-p(p - 1)(15pq + 3p + 5q + 2)}{(p - 1)[3q^2(3p + 1)^2 + 2q(9p^2 + 9p + 4) + (3p^2 + 3p + 1)]}$$

(S-a presupus că sînt îndeplinite condițiile de existență pentru numerele care intervin în ultimul caz.)

4) *Ecuațiile cu coeficienți complecși $x^2 + p_1x + q_1 = 0$, $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ admit o singură rădăcină comună x_0. Să se formeze ecuația de gradul doi ale cărei rădăcini sînt rădăcinile necomune x_1, respectiv x_2, ale celor două ecuații.*

Pentru rezolvare să observăm că avem:

$$x_0^2 + p_1x_0 + q_1 = 0,\ x_0^2 + p_2x_0 + q_2 = 0,$$

de unde, prin scădere, deducem $(p_1 - p_2)x_0 = q_2 - q_1$.

Dacă $p_1 = p_2$ și $q_1 \neq q_2$, ecuațiile nu au rădăcini comune, iar dacă $p_1 = p_2$ și $q_1 = q_2$, ecuațiile au ambele rădăcini comune. Deci pentru ca problema să aibă soluții este necesar ca $p_1 \neq p_2$. În acest caz:

$$x_0 = \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2};\ x_1x_0 = q_1;\ x_2x_0 = q_2. \qquad (7)$$

În fine, dacă $x_0 = 0$, obținem $q_1 = q_2 = 0$, deci $x_1 = -p_1$, $x_2 = -p_2$ și ecuația cerută este $x^2 + (p_1 + p_2)x + p_1p_2 = 0$. De asemenea, ipoteza $q_1 = q_2$ conduce la $x_0 = 0$, deci $q_1 = q_2 = 0$.

Vom presupune deci $p_1 \neq p_2$ și cel puțin unul din numerele q_1, q_2 nenul.

Din relațiile (7), deducem:

$$x_1 = \frac{q_1(p_1 - p_2)}{q_2 - q_1}\ ;\ x = \frac{q_2(p_1 - p_2)}{q_2 - q_1},$$

ecuația de gradul doi, cu rădăcinile x_1 și x_2, fiind:

$$(q_1 - q_2)^2x^2 + (p_1 - p_2)(q_1^2 - q_2^2)x + q_1q_2(p_1 - p_2)^2 = 0.$$

Pentru aplicația următoare vom observa că, avînd în vedere teorema fundamentală a algebrei și unicitatea descompunerii unui polinom în factori liniari, se deduce echivalența afirmațiilor:

(1) polinoamele $p, q \in \mathbb{C}[x]$, $p \neq 0$, $q \neq 0$ au aceleași rădăcini;

(2) polinoamele $p, q \in \mathbb{C}[x]$, $p \neq 0$, $q \neq 0$ au coeficienții proporționali.

În plus facem mențiunea că dacă $p = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$, $q = b_nX^n + b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + b_1X + b_0$, pentru proporționalitatea coeficienților adoptăm scrierea formală:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \ldots = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_0}{b_0},$$

în sensul că numărătorul sau numitorul unuia dintre rapoarte fiind nul și numitorul, respectiv numărătorul aceluiași raport este nul.

5) *Dacă $p, q \in \mathbb{Z}$ să se determine în ce condiții ecuațiile:*

$$(p + 1)x^2 + (2p + 1)x - 2 = 0\ ;\ 2x^2 + (q + 4)x + 2q = 0,$$

admit aceleași rădăcini.

Datorită observației anterioare putem scrie $\frac{p+1}{2} = \frac{2p+1}{q+4} = \frac{-1}{q}$ și sîntem conduși la unica condiție $q(p + 1) = -2$. Deoarece p și q sînt numere întregi deducem $p + 1 \in \{-2; -1; 1; 2\}$, deci $p \in \{-3; -2; 1; 0\}$. Obținem astfel soluțiile:

$$(p_1 = -3\ ;\ q = 1)\ ;\ (p_2 = -2\ ;\ q_2 = 2)\ ;\ (p_3 = 1\ ;\ q_3 = -1)\ ;$$
$$(p_4 = 0\ ;\ q_4 = -2).$$

6) *Dacă x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuației:*

$3x^2+(3m - 4)x - (m - 1) = 0$ *și x', x'' sînt rădăcinile ecuației:* $(m + 2)x^2 + (4m - 3)x - 3(m - 1) = 0$, *să se determine valorile parametrului $m \in \mathbb{C}$ pentru care se verifică relațiile:*

$$x_1x' = x_2x'' = 2.$$

Inlocuind în prima ecuație x cu $\frac{2}{x}$, obținem ecuația $(m-1)x^2 - 2(3m-4)x - 12 = 0$, ale cărei rădăcini sînt evident $\frac{2}{x_1}$ și $\frac{2}{x_2}$, deci x' și respectiv x''. Rezultă că ecuația obținută are aceleași rădăcini cu cea de a doua ecuație din enunț, ceea ce este tot una cu:

$$\frac{m-1}{m+2} = \frac{-2(3m-4)}{4m-3} = \frac{4}{m-1},$$

de unde se deduce $m = -1$.

Evident că pentru rezolvare am presupus $x_1x_2 \neq 0$, deci $m \neq 1$. Dacă $m = 1$, ecuațiile date sînt în ordine $3x^2 - x = 0$, $3x^2 + x = 0$ și problema nu are soluții.

3.2. LIMITELE RĂDĂCINILOR REALE ALE ECUAȚIEI DE GRADUL AL DOILEA CU COEFICIENȚI REALI, DACĂ COEFICIENTUL TERMENULUI DE GRADUL DOI TINDE CĂTRE ZERO

Fie ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, cu coeficienți reali, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Deoarece coeficientul a tinde către zero, putem presupune a suficient de mic astfel încît $4|ac| < b^2$, deci $b^2 - 4ac > 0$. În acest caz, pentru $b > 0$ avem:

$$\lim_{a\to 0} x_1 = \lim_{a\to 0} \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \lim_{a\to 0} \frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}} = -\frac{c}{b}.$$

Pentru $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ se obțin limite laterale infinite și diferite.

Analog, dacă $b < 0$, rezultă $\lim_{a\to 0} x_2 = -\frac{c}{b}$, iar pentru x_1 se deduc limite laterale infinite și diferite.

Deoarece pentru $a \to 0$, avem $ax^2 + bx + c \to bx + c$, considerăm ecuația $bx + c = 0$ ca „ecuația limită a ecuației $ax^2 + bx + c = 0$". Din acest motiv este util uneori să interpretăm ecuația algebrică de gradul întîi, cu o singură necunoscută, ca o ecuație de gradul doi cu o singură necunoscută „cu o rădăcină la infinit".

Exemplu: *Să se scrie ecuațiile tangentelor duse la cercul* $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$ *din punctul* $P(-1; 4)$.

Dacă $F(x; y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3$, deducem $F(-1; 4) = 4$, deci punctul P este exterior cercului, ceea ce confirmă existenţa a două tangente prin P la cerc.

Ecuaţiile tangentelor de pantă m, duse la cerc, sînt $y - 2 = m(x - 3) \pm 4\sqrt{1 + m^2}$ şi, din condiţia ca acestea să treacă prin punctul P, deducem $2 = -4m \pm 4\sqrt{1 + m^2}$, ceea ce conduce la $4m - 3 = 0$, deci $m = \frac{3}{4}$. Rezultă că ecuaţia uneia din tangente este $y - 4 = \frac{3}{4}(x + 1) \Rightarrow 3x - 4y + 19 = 0$.

Considerînd, în cazul general, cercul de ecuaţie $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$ şi punctul $P(x_0, y_0)$, exterior cercului, ecuaţia, care dă pantele celor două tangente duse din P la cerc, este:

$$[(x_0 - a)^2 - r^2]m^2 - 2(x_0 - a)(y_0 - b)m + [(y_0 - b)^2 - r^2] = 0 \quad (8)$$

Ecuaţia (8) are întotdeauna două soluţii dacă $(x_0 - a)^2 - r^2 \neq 0$, sau $x_0 \neq a \pm r$. În cazurile de excepţie una din tangente este paralelă cu axa ordonatelor.

Revenind la cazul numeric anterior, evident ecuaţia $4m - 3 = 0$ este cazul limită al ecuaţiei (8) pentru $(x_0 - a)^2 - r^2 \to 0$. Rezultă că a doua tangentă prin $P(-1; 4)$ la cerc, fiind paralelă cu axa ordonatelor, are ecuaţia $x + 1 = 0$.

3.3. RELAŢIA INDEPENDENTĂ DE PARAMETRU CARE EXISTĂ ÎNTRE RĂDĂCINILE UNEI ECUAŢII DE GRADUL DOI CU O SINGURĂ NECUNOSCUTĂ, AI CĂREI COEFICIENŢI DEPIND DE UN PARAMETRU

Exemplu: *Fie ecuaţia* $mx^2 + 2(m + 1)x + (m - 1) = 0$, $m \in \mathbb{R}^*$.

1°. *Să se arate că între rădăcinile ecuaţiei există o relaţie independentă de* m.

2°. *Să se determine, cu ajutorul acestei relaţii, rădăcinile reale egale ale ecuaţiei.*

3°. *Să se determine valorile parametrului* m *pentru care ecuaţia admite rădăcini reale egale.*

4°. *Să se determine valorile parametrului* m *astfel încît ambele rădăcini ale ecuaţiei să fie numere întregi.*

Notînd $S = x_1 + x_2$ şi $P = x_1x_2$, deducem:

$$S = \frac{-2(m + 1)}{m}, \quad P = \frac{m - 1}{m}.$$

Eliminînd parametrul m, obținem relația între rădăcini, independentă de parametru:

$$2P - S - 4 = 0 \rightarrow 2x_1x_2 - (x_1 + x_2) - 4 = 0. \qquad (9)$$

Dacă rădăcinile x_1 și x_2 sînt egale, să punem $x_1 = x_2 = \alpha$. Din (9) deducem $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$, deci $\alpha = 2$, sau $\alpha = -1$.

Dacă $\alpha = 2$ este rădăcina dublă, din ecuația dată, avem $4m + 4(m + 1) + m - 1 = 0 \rightarrow m = -1/3$.

Înlocuind $\alpha = -1$ în aceeași ecuație, obținem $-3 = 0$, contradicție care conduce la concluzia că ecuația inițială nu admite rădăcină dublă $\alpha = -1$. Să observăm că această ecuație mai poate fi scrisă sub forma:

$$x^2 + 2\left(1 + \frac{1}{m}\right)x + \left(1 - \frac{1}{m}\right) = 0,$$

deci ecuația limită pentru m tinzînd la infinit este $x^2 + 2x + 1 = 0$, ale cărei rădăcini sînt $x' = x'' = -1$. Rezultatul, aparent contradictoriu, obținut la rezolvarea punctului 2°, se justifică prin faptul că ecuația inițială este de tipul:

$$(am + b)x + (cm + d)x + (em + f) = 0,$$

al cărei discriminant este $\Delta = (cm + d)^2 - 4(am + b)(em + f) = (c^2 - 4ae)m^2 + \ldots$.

Ecuația $\Delta = 0$, de gradul doi în m, are o „rădăcină la infinit" dacă $c^2 - 4ae = 0$, ceea ce este și cazul problemei propuse.

Pentru rezolvarea ultimului punct al problemei, din (9) putem scrie:

$$x_1 = \frac{x_2 + 4}{2x_2 - 1}, \text{ deci } 2x_1 = \frac{2x_2 + 8}{2x_2 - 1}, \text{ sau } 2x_1 = 1 + \frac{9}{2x_2 - 1}.$$

Rezultă de aici că, x_1, x_2 fiind numere întregi, avem cu necesitate $2x_2 - 1 \in \{-9; -3; -1; 1; 3; 9\}$, sau $x_2 \in \{-4; -1; 0; 1; 2; 5\}$. Rezultatele ce se obțin sînt următoarele: $\left(m = -\frac{1}{3};\ x_1 = x_2 = 2\right)$; $\left(m = -\frac{1}{4};\ x_1 = 1;\ x_2 = 5\right)$; $(m = 1;\ x_1 = -4;\ x_2 = 0)$.

3.4. APLICAȚII LA REZOLVAREA UNOR ECUAȚII ÎN NUMERE ÎNTREGI

Evident, problema rezolvării ecuației de gradul doi cu o singură necunoscută prezintă interes în această lucrare, numai în cazul în care coeficienții ecuației depind de un parametru. Mai facem observația că

în cazurile în care ambele rădăcini sînt întregi, iar coeficienții ecuației depind de un singur parametru, problema se rezolvă în general folosind relația între rădăcini, independentă de parametru (Spunem, „în general", deoarece pot interveni dificultăți de calcul legate în special de eliminarea parametrului și de explicitarea relației relativ la una dintre rădăcini). Pentru diversele tipuri de ecuații care intervin nu există un procedeu general de rezolvare a problemei. În cele ce urmează vom prezenta cîteva exemple.

Exemple : 1) *Să se determine $m \in Z$ astfel încît ecuația :*

$$x^2 - 2(2m + 1)x + 3m(m + 1) = 0,$$

să admită cel puțin o rădăcină întreagă.

Să observăm pentru început că din enunț rezultă că o rădăcină fiind număr întreg și cealaltă rădăcină este număr întreg. În plus, deoarece rădăcinile ecuației sînt :

$$2m + 1 - \sqrt{m^2 + m + 1} \quad \text{și} \quad 2m + 1 + \sqrt{m^2 + m + 1},$$

rezultă că $\sqrt{m^2 + m + 1}$ este număr întreg. Punînd $\sqrt{m^2 + m + 1} =$ $= m + k$, $k \in Z$, deducem :

$$m = -\frac{k^2 - 1}{2k - 1}$$

de unde rezultă $4m = -\left(2k + 1 - \frac{3}{2k - 1}\right)$.

Deoarece $m \in Z \Rightarrow 4m \in Z$, obținem condiția necesară :

$$2k - 1 \in \{-3;\ -1;\ 1;\ 3\},$$

deci $k \in \{-1;\ 0;\ 1;\ 2\}$. Înlocuind obținem pentru m valorile -1 și 0.

Soluțiile problemei sînt : $(m = -1;\ x_1 = -2;\ x_2 = 0)$ și $(m = 0;$ $x_1 = 0;\ x_2 = 2)$.

2) *Să se determine valorile parametrului întreg m astfel încît ecuația :*

$$2mx^2 + (8m - 3)x + 6m - 6 = 0, \tag{10}$$

să admită cel puțin o rădăcină în Z.

Pentru rezolvarea problemei vom scrie din (10) :

$$2m(x^2 + 4x + 3) = 3(x + 2),$$

de unde deducem $x \neq -1$, $x \neq -3$ și în plus pentru $m = 0$, ecuația admite rădăcina $x_1 = -2$. În fine, deducem :

$$m = \frac{3(x + 2)}{2(x^2 + 4x + 3)}. \tag{10'}$$

Deoarece mulţimea valorilor lui x, pentru care valorile fracţiei din partea a doua a relaţiei (10') sînt în modul mai mari decît 1 este inclusă într-un interval, este suficient să determinăm un interval de lungime cît mai mică care include această mulţime. Pentru aceasta punînd:

$$\left|\frac{3(x+2)}{2(x^2+4x+3)}\right| < 1,\ x \neq -2,$$

deducem $x \in (-\infty; -4) \cup \left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right) \cup (0; +\infty)$. Deci pot verifica relaţia (10') numai valorile -4 şi 0 ale lui x. Avînd în vedere că am obţinut anterior şi valoarea -2 a lui x, înlocuind în (10') deducem soluţiile problemei: $\left(m = -1;\ x_1 = -4;\ x_2 = \frac{-3}{2}\right)$, $(m = 0;$ ecuaţie de gradul întîi cu rădăcina $x_0 = -2)$ şi $(m = 1;\ x_1 = 0;\ x_2 = -5/2)$.

3) *Să se stabilească în ce condiţii ecuaţia:*

$$(m+k)x^2 + 2(m+1)x + (m+2k-1) = 0;\ m, k \in \mathbf{Z};\ m+k \neq 0.$$

admite ambele rădăcini numere întregi.

Dacă $S = x_1 + x_2$ şi $P = x_1x_2$, putem scrie:

$$S = -\frac{2(m+1)}{m+k};\ P = \frac{m+2k-1}{m+k},$$

de unde:

$$m(S+2) = -Sk - 2;\ m(P-1) = -Pk + 2k - 1.$$

Dacă $m \neq 0$, deducem:

$$(S+2)(Pk - 2k + 1) = (P-1)(Sk+2),$$

sau

$$(k-1)(S - 2P + 4) = 0.$$

Pentru $k = 1$ ecuaţia din enunţ se scrie $(m+1)(x^2 + 2x + 1) = 0$. Cum $m \neq -1$, rezultă $x_1 = x_2 = -1$.

Pentru $k \neq 1$ obţinem $S - 2P + 4 = 0$, deci $2x_1x_2 - (x_1 + x_2) - 4 = 0$, relaţie care se mai scrie sub forma:

$$2x_2 = 1 + \frac{9}{2x_1 - 1},$$

de unde deducem $2x_1 - 1 \in \{-9; -3; -1; 1; 3; 9\}$. Se obţin astfel următoarele perechi de soluţii:

$$(-4; 0);\ (-1; -1);\ (1; 5);\ (2; 2).$$

Înlocuind în ecuaţia din enunţ se obţin condiţiile cerute.

Dacă $m = 0$, ecuaţia iniţială se scrie $kx^2 + 2x + 2k - 1 = 0$, $k \neq 0$. Observînd că discriminantul ecuaţiei este $\Delta = (1 - k)(2k + 1)$ şi avînd în vedere condiţiile $\Delta \geqslant 0$, $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$, deducem $k = 1$, deci $x_1 = x_2 = -1$.

Răspunsul este prezentat în tabelul următor:

Condiţia	$2k + m = 1$ $k \neq 1$	$k = 1$ $m \neq -1$	$4m + 3k + 1 = 0$ $k \neq 1$	$3m + 2k + 1 = 0$ $k \neq 1$
Rădăcinile	$(-4; 0)$	$(-1; -1)$	$(1; 5)$	$(2; 2)$

4) *Să se determine* $x \in \mathbf{Z}$ *astfel încît:*

$$\left[\frac{x^2 - 4}{3}\right] = (x + 2)^2,$$

unde $[a]$ *este „partea întreagă a numărului* a".

Dacă $x = 3k$, $k \in \mathbf{Z}$, deducem $\left[3k^2 - 2 + \frac{2}{3}\right] = (3k + 2)^2$ deci $3k^2 - 2 = 9k^2 + 12k + 4$, de unde obţinem $k = -1$ şi $x = -3$.
Dacă $x = 3k + 1$, $k \in \mathbf{Z}$, deducem $3k^2 + 8k + 5 = 0$, deci $k = -1$ şi $x = -2$.
Dacă $x = 3k - 1$, $k \in \mathbf{Z}$, sîntem conduşi la ecuaţia $3k^2 + 4k + 1 = 0$, deci $k = -1$ şi $x = -4$.

Soluţiile ecuaţiei sînt deci $x_1 = -4$, $x_2 = -3$, $x_3 = -2$.

3.5. POZIŢIILE RĂDĂCINILOR REALE ALE ECUAŢIEI DE GRADUL DOI CU COEFICIENŢI REALI, CU O SINGURĂ NECUNOSCUTĂ, FAŢĂ DE UN NUMĂR REAL ŞI FAŢĂ DE UN INTERVAL

Exemple: 1) *Să se studieze poziţiile rădăcinilor reale ale ecuaţiei:*

$$(m^2 - 1)x^2 - 2(2m + 1)x - m(m + 2) = 0, \; m \in \mathbf{R},$$

în raport cu numărul 2.

Discriminantul ecuaţiei este $\Delta = (2m + 1)^2 + m(m + 2)(m^2 - 1) = m^2(m^2 + m + 1) + m(m^2 + m + 1) + (m^2 + m + 1) = (m^2 + m + 1)^2$.

Deducem de aici rădăcinile ecuaţiei din enunţ:

$$x_1 = \frac{-m}{m + 1}; \; x_2 = \frac{m + 2}{m - 1}, \text{ unde } m \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 1\}.$$

Dacă $m = 1$ sau $m = -1$ ecuația are gradul întîi și admite, în ambele cazuri, rădăcina $x_0 = -1/2 < 2$.

Pentru a stabili pozițiile rădăcinilor ecuației în cazurile $m \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 1\}$, vom studia variația semnului fiecăreia din diferențele:

$$x_1 - 2 = \frac{-(3m+2)}{m+1}; \quad x_2 - 2 = \frac{-(m-4)}{m-1},$$

care este prezentată în următorul tabel:

m	$-\infty$		-1		$-\frac{2}{3}$		1		4		$-\infty$
$x_1 - 2$		$-$	|	$+$	0	$-$	|	$-$		$-$	
$x_2 - 2$		$-$	|	$-$		$-$	|	$+$	0	$-$	

Rezultă că ecuația propusă admite rădăcini reale, oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$, aceste rădăcini fiind situate față de numărul 2 în modul următor:

$$m \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{2}{3}; 1\right) \cup (4; +\infty) \Rightarrow x_1 < 2; \ x_2 < 2;$$

$$m \in \{-1; 1\} \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{2} < 2;$$

$$m \in \left(-1; -\frac{2}{3}\right) \Rightarrow x_2 < 2 < x_1;$$

$$m = -\frac{2}{3} \Rightarrow x_2 < 2 = x_1;$$

$$m \in (1; 4) \Rightarrow x_1 < 2 < x_2;$$

$$m = 4 \Rightarrow x_1 < 2 = x_2.$$

2) *Să se studieze pozițiile rădăcinilor ecuației*

$$(4m^2 - 1)x^2 - 6mx - (m^2 - 1) = 0, \ m \in \mathbf{R},$$

față de intervalul $[-1; 2]$.

Discriminantul ecuației este $\Delta = 9m^2 + (4m^2 - 1)(m^2 - 1) = 4m^4 + 4m^2 + 1 = (2m^2 + 1)^2$. Se obțin astfel rădăcinile ecuației propuse:

$$x_1 = \frac{m+1}{2m-1}; \ x_2 = \frac{1-m}{2m+1}, \quad m \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}.$$

Deducem:

$$x_1 - (-1) = \frac{m+1}{2m-1} + 1 = \frac{3m}{2m-1}; \quad x_1 - 2 = \frac{m+1}{2m-1} - 2 = \frac{3(1-m)}{2m-1};$$

$$x_2 - (-1) = \frac{1-m}{2m+1} + 1 = \frac{m+2}{2m+1}; \quad x_2 - 2 = \frac{1-m}{2m+1} - 2 = \frac{-(5m+1)}{2m+1}.$$

Putem astfel alcătui următoarele tabele:

m	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x_1 - (-1)$		$+$		$+$	0	$-$		$+$		$+$	
$x_1 - 2$		$-$		$-$	$-$	$-$		$+$	0	$-$	
		$-1 < x_1 < 2$		$-1 < x_1 < 2$		$x_1 < -1$		$x_1 < 2$		$-1 < x_1 < 2$	

m	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{5}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x_2 - (-1)$		$+$	0	$-$		$+$		$+$		$+$	
$x_2 - 2$		$-$		$-$		$+$	0	$-$		$-$	
		$-1 < x_2 < 2$		$x_2 < -1$		$x_2 > 2$		$-1 < x_2 < 2$		$-1 < x_2 < 2$	

Răspunsul este următorul:

$$m < -2 \Rightarrow -1 < x_1,\ x_2 < 2;$$

$$m = -2 \Rightarrow x_2 = -1 < x_1 < 2;$$

$$-2 < m < -\frac{1}{2} \Rightarrow x_2 < -1 < x_1 < 2;$$

$m = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ ecuația are gradul unu cu rădăcina $x_0 = -\frac{1}{4} \in (-1;\ 2)$;

$$-\frac{1}{2} < m < -\frac{1}{5} \Rightarrow -1 < x_1 < 2 < x_2;$$

$$m = -\frac{1}{5} \Rightarrow -1 < x_1 < 2 = x_2;$$

$$-\frac{1}{5} < m < 0 \Rightarrow -1 < x_1,\ x_2 < 2;$$

$$m = 0 \Rightarrow x_1 = -1 < x_2 < 2;$$

$$0 < m < \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 < -1 < x_2 < 2;$$

$m = \frac{1}{2} \Rightarrow$ ecuaţia are gradul întîi cu rădăcina $x_0 = \frac{1}{4} \in (-1\,;\,2)$;

$$\frac{1}{2} < m < 1 \Rightarrow -1 < x_2 < 2 < x_1\,;$$

$$m = 1 \Rightarrow -1 < x_2 < 2 = x_1\,;$$

$$m > 1 \Rightarrow -1 < x_1,\ x_2 < 2.$$

După cum se poate constata din aceste exemple, rezolvarea problemelor a fost uşurată, deoarece discriminanţii ecuaţiilor s-au exprimat, în fiecare caz, prin pătratele unor polinoame. În cazul în care discriminantul ecuaţiei nu se exprimă prin pătratul unui polinom, rezolvarea problemei prin procedeul indicat implică dificultăţi de calcul, pentru a căror evitare indicăm în continuare alte două procedee de rezolvare.

Fie funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a,\ b,\ c \in \mathbf{R},\ a \neq 0)$. Dacă discriminantul ecuaţiei ataşate funcţiei este pozitiv, se poate alcătui următorul tabel de variaţie a semnelor valorilor funcţiei:

x	$-\infty$		x_1		$\frac{x_1 + x_2}{2}$		x_2		$+\infty$
$f(x)$		sign a	0		$-$sign a		0	sign a	

(S-a notat prin sign a, semnul lui a şi prin x_1, x_2 rădăcinile ecuaţiei ataşate).

Fie α este un număr real care nu este rădăcină a ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$.

Dacă $x_1 < \alpha < x_2$, datorită tabelului anterior $af(\alpha) < 0$ şi reciproc inegalitatea $af(\alpha) < 0$ implică $x_1 < \alpha < x_2$.

Dacă $\alpha \notin [x_1\,;\,x_2]$, pe baza aceluiaşi tabel, deducem $af(\alpha) > 0$ şi reciproc din $af(\alpha) > 0$ rezultă $\alpha \notin [x_1\,;\,x_2]$.

În fine să observăm că $\alpha \notin [x_1\,;\,x_2]$ implică $\alpha < x_1$ sau $x_2 < \alpha$. In primul caz deducem:

$$\alpha < \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a},$$

iar în al doilea caz:

$$\alpha > \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

În concluzie :

$$(1)\ x_1 \leqslant x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < \alpha. \end{cases}$$

$$(2)\ x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) < 0. \end{cases}$$

$$(3)\ \alpha_2 < x_1 \leqslant x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \alpha < -\dfrac{b}{2a}. \end{cases}$$

Utilizînd aceleași notații, să considerăm acum intervalul $[\alpha ; \beta]$. Deducem :

$$(1')\ x_1 < \alpha < x_2 < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) < 0 \\ af(\beta) > 0. \end{cases}$$

$$(2')\ \alpha < x_1 \leqslant x_2 < \beta \quad \begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) > 0 \\ \alpha < -\dfrac{b}{2a} < \beta. \end{cases}$$

$$(3')\ x_1 < \alpha < \beta < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) < 0 \\ af(\beta) < 0. \end{cases}$$

$$(4')\ \alpha < x_1 < \beta < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ (af\beta) < 0. \end{cases}$$

3) *Fie ecuația* $(m - 2)x^2 + 2(3m - 8)x - (m - 4) = 0,\ m \in \mathbb{R}$. *Să se determine valorile parametrului* m *astfel încît ecuația să admită cel puțin o rădăcină în* $I = (-\infty ; 1]$.

Dacă $m = 2$ ecuația are o singură rădăcină $x = \dfrac{1}{2} \in I$.

Dacă $m \neq 2$ discriminantul ecuației este $\Delta = (3m - 8)^2 + (m - 2)(m - 4) = 2(5m^2 - 27m + 36) = 2(5m - 12)(m - 3)$. Pentru rezolvarea problemei rezultă condiția necesară :

$$m \in \left(-\infty ; \frac{12}{5}\right] \cup [3; +\infty) \setminus \{2\},$$

în aceste cazuri ecuația având rădăcinile reale x_1, x_2. Punînd $x_1 \leqslant x_2$, rezultă că ecuația admite cel puțin o rădăcină în I în următoarele cazuri :

(1) $x_1 \leqslant x_2 < 1$; (2) $x_1 < 1 < x_2$; (3) $1 \in \{x_1 ; x_2\}$.

Rezolvare (1). Notînd $f(x) = (m - 2)x^2 + 2(3m - 8)x - (m - 4)$ putem scrie :

$$x_1 \leqslant x_2 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ (m - 2)f(1) > 0 \\ \dfrac{8 - 3m}{m - 2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\infty ; \dfrac{12}{5}\right] \cup [3; +\infty) \setminus \{2\} \\ (m - 2)(3m - 7) > 0 \\ \dfrac{2m - 5}{m - 2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\infty ; \dfrac{12}{5}\right] \cup [3; +\infty) \setminus \{2\} \\ m \in (-\infty ; 2) \cup \left(\dfrac{7}{3} ; +\infty\right) \\ m \in (-\infty ; 2) \cup \left(\dfrac{5}{2} ; +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty ; 2) \cup [3 ; +\infty).$$

Rezolvare (2)

$$x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ (m - 2)f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\infty ; \dfrac{12}{5}\right] \cup [3 ; +\infty) \setminus \{2\} \\ m \in \left(2 ; \dfrac{7}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(2 ; \frac{7}{3}\right).$$

Rezolvare (3). Dacă 1 este rădăcină a ecuației deducem $f(1) = 0$, deci $m = \dfrac{7}{3}$.

În concluzie ecuația din enunț are cel puțin o rădăcină în intervalul I dacă și numai dacă avem $m \in \left(-\infty ; \dfrac{7}{3}\right] \cup [3 ; +\infty)$.

4) *Să se determine valorile parametrului real m astfel încît ecuația:*

$$(m+1)x^2-(3m+10)x+(3m+2)=0$$

să admită cel puțin o rădăcină în intervalul $I=[-1;1]$.

Dacă $m=-1$ ecuația devine $7x+1=0$ și are rădăcina $x_0=-\frac{1}{7}\in I$.

Dacă $m\neq -1$, o condiție necesară este $\Delta\geqslant 0$. Deoarece $\Delta=(3m+10)^2-4(m+1)(3m+2)=-(3m^2-40m-92)=-(m+2)(3m-46)$, deducem $m\in\left[-2;\frac{46}{3}\right]\setminus\{-1\}$.

Condiția $\Delta\geqslant 0$ fiind îndeplinită, ecuația admite cel puțin o rădăcină în intervalul I în următoarele cazuri:

$$(1)\ x_1<-1<x_2<1;\ (2)\ -1<x_1<1<x_2;\ (3)\ -1<x_1\leqslant x_2<1;$$
$$(4)\ f(-1)=0;\ (5)\ f(1)=0,$$

x_1, x_2 fiind rădăcinile ecuației și $f(x)=(m+1)x^2-(3m+10)x+(3m+2)$.

Rezolvare (1).

$$\left.\begin{matrix}(m+1)f(-1)<0\\(m+1)f(1)>0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)(7m+13)<0\\(m+1)(m-7)>0\end{cases}\Leftrightarrow m\in\left(-\frac{13}{7};-1\right).$$

Avînd în vedere și $\Delta\geqslant 0$ se obțin soluțiile $m\in\left(-\frac{13}{7};-1\right)$.

Rezolvare (2).

$$\left.\begin{matrix}(m+1)f(-1)>0\\(m+1)f(1)<0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)(7m+13)>0\\(m+1)(m-7)<0\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-1;7).$$

Se obțin soluțiile $m\in(-1;7)$.

Rezolvare (3).

$$\left.\begin{matrix}(m+1)f(-1)>0\\(m+1)f(1)>0\\-1<\frac{3m+10}{2(m+1)}<1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)(7m+13)>0\\(m+1)(m-7)>0\\(m+8)(m+1)<0\\(5m+12)(m+1)>0\end{cases}\Leftrightarrow m\in\left(-8;-\frac{12}{5}\right).$$

Avînd în vedere condiția $\Delta\geqslant 0$ deducem în acest caz $m\in\emptyset$.

Rezolvare (4). $f(-1)=0\Leftrightarrow m=-\frac{13}{7}$.

Rezolvare (5). $f(1)=0\Leftrightarrow m=7$.

Deducem în final că ecuaţia admite cel puţin o rădăcină în intervalul I dacă şi numai dacă avem $m \in \left[-\frac{13}{7}; 7\right]$.

Drept concluzie, ca urmare a rezolvării problemelor din exemplele 3 şi 4. facem observaţia că procedeul de rezolvare utilizat necesită un volum sporit de muncă, dacă este necesară studierea tuturor situaţiilor legate de poziţia rădăcinilor reale ale ecuaţiei de gradul doi, faţă de un număr sau un interval.

În continuare vom indica, pentru astfel de probleme, un alt procedeu de rezolvare, care ni se pare a fi mai economicos dacă avem în vedere volumul de muncă utilizat. Pentru înţelegerea modului de lucru, înaintea exemplelor pe care le prezentăm, facem două observaţii.

Observaţii : 1. Să presupunem că x, y sînt variabile în R astfel încît $y = x - \alpha$ unde α este un număr real fixat. Tabelul de variaţie a semnului variabilei y, în funcţie de valorile variabilei x, este următorul :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
y	$-$	0	$+$

Aceasta ne permite următoarele concluzii :

$$x < \alpha \Leftrightarrow y < 0 ; \; x = \alpha \Leftrightarrow y = 0 ; \; x > \alpha \Leftrightarrow y > 0.$$

Astfel problema stabilirii poziţiilor valorilor variabilei x faţă de numărul α se identifică cu problema stabilirii semnelor valorilor variabilei y.

2. Să considerăm acum variabilele reale x şi y astfel încît $y = \frac{x-\alpha}{x-\beta}$, unde $\alpha \neq \beta$ sînt două numere reale fixate. Presupunînd $\alpha < \beta$, tabelul de variaţie a semnului variabilei y, în funcţie de valorile variabilei x este următorul :

x	$-\infty$	α		β	$+\infty$
y	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$

Rezultă că putem scrie :

$$x \in (\alpha ; \beta) \Leftrightarrow y < 0 ; \; x = \alpha \Leftrightarrow y = 0 ; \; x \notin [\alpha ; \beta] \Leftrightarrow y > 0.$$

Menţionăm că în $y = \frac{x-\alpha}{x-\beta}$, considerînd $\beta < \alpha$, concluzia privind poziţiile valorilor variabilei x faţă de intervalul $[\beta ; \alpha]$, este aceeaşi.

Deducem de aici că problema studierii pozițiilor valorilor variabilei x față de intervalul determinat de numerele α, β se identifică cu problema studierii semnelor valorilor variabilei y.

5) *Să se studieze pozițiile rădăcinilor reale ale ecuației*

$$(m + 3)x^2 - 8mx - (9m^2 + 2m - 15) = 0,$$

față de numărul -2, *în funcție de valorile parametrului* $m \in \mathbb{R}$.

Să considerăm pentru început $m \neq -3$.

Discriminantul ecuației este $\Delta = 16m^2 + (m + 3)(9m^2 + 2m - 15) = 9m^3 + 45m^2 - 9m - 45 = 9(m + 5)(m + 1)(m - 1)$.

Menționăm că este necesară calcularea discriminantului la începutul rezolvării, deoarece dacă acesta este pătratul unui polinom, este indicat procedeul de rezolvare din exemplele 1 și 2.

Avînd în vedere observația 1 facem substituția $y = x + 2$ (deoarece $\alpha = -2$) și putem alcătui următorul tabel de variație a semnului lui y:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y	$-$	0	$+$

Rezultă $x = y - 2$ și, înlocuind în ecuația propusă, deducem:

$$(m + 3)y^2 - 12(m + 1)y - 9(m^2 - 2m - 3) = 0.$$

Discriminantul ecuației în y este $\Delta' = 36(m + 1)^2 + 9(m + 3)(m^2 - 2m - 3) = 9(m + 5)(m + 1)(m - 1)$. (Rezultatul $\Delta' = \Delta$ nu surprinde, deoarece prin substituția $y = x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, avem $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}$ deci ecuațiile în x și y au rădăcinile de aceeași natură).

Dacă y_1, y_2 sînt rădăcinile ecuației în y, putem scrie:

$$P = y_1 y_2 = \frac{-9(m + 1)(m - 3)}{m + 3}; \quad S = y_1 + y_2 = \frac{12(m + 1)}{m + 3}.$$

În cazul $m = -3$ ecuația propusă este de gradul întîi și are soluția $x_0 = \frac{5}{2} > -2$.

Rezultatele obținute sînt sintetizate în tabelul numărul 1, tabel care constituie răspunsul pentru problema propusă.

m	Δ	P	S	Ecuația în y	Ecuația în x
$-\infty$					
	$-$	$+$	$+$	Rădăcini complexe conjugate	Rădăcini complexe conjugate
-5	0			$y_1=y_2>0$	$x_1=x_2>-2$
	$+$	$+$	$+$	Răd. reale diferite: $y_1>0$, $y_2>0$	Răd. reale diferite: $x_1>-2$, $x_2>-2$
-3	$=$	$=$	$=$		Ec. gr. I: $x_0=-\frac{5}{2}>-2$
	$+$	$-$	$-$	Răd. reale diferite: $y_1<0$, $y_2>0$	Răd. reale diferite: $x_1<-2<x_2$
-1	0	0	0	$y_1=y_2=0$	$x_1=x_2=-2$
	$-$	$+$	$+$	Rădăcini complexe conjugate	Rădăcini complexe conjugate
1	0			$y_1=y_2>0$	$x_1=x_2>-2$
	$+$	$+$	$+$	Rădăcini reale diferite: $y_1>0$, $y_2>0$	Rădăcini reale diferite: $x_1>-2$, $x_2>-2$
3		0		Rădăcini reale diferite: $y_1=0<y_2$	Rădăcini reale diferite: $x_1=-2<x_2$
	$+$	$-$	$+$	Rădăcini reale diferite: $y_1<0$, $y_2>0$	Rădăcini reale diferite: $x_1<-2<x_2$
$+\infty$					

TABELUL NR. 1

6) *Să se rezolve și să se discute ecuația:*

$$(3m-1)\cos 2x + 4(m-1)\sin x + 3m - 5 = 0, \ m \in \mathbf{R}.$$

Vom observa că ecuația propusă se mai poate scrie $(3m-1)(1-2\sin^2 x) + 4(m-1)\sin x + 3m - 5 = 0$, de unde deducem:

$$(3m-1)\sin^2 x - 2(m-1)\sin x - 3(m-1) = 0. \qquad (11)$$

Notînd $\sin x = t$ obținem ecuația:

$$(3m-1)t^2 - 2(m-1)t - 3(m-1) = 0, \ m \in \mathbf{R}, \ t \in \mathbf{R}, \ |t| \leqslant 1, \qquad (11')$$

al cărei discriminant este $\Delta = (m-1)^2 + 3(m-1)(3m-1) = (2m - $ $- 1)(5m-2)$.

Pentru $m \in \left(-\infty ; \frac{2}{5}\right] \cup [1 ; +\infty) \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ ecuația (11′) admite două rădăcini reale t_1 și t_2.

Dacă $|t_1| \leqslant 1$, ecuația (11′) admite familia de soluții:

$$x = (-1)^k \arcsin t_1 + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Dacă și $|t_2| \leqslant 1$, ecuația (11′) admite și familia de soluții:

$$x = (-1)^h \arcsin t_2 + h\pi,\ h \in \mathbf{Z}.$$

Sîntem astfel conduși la a stabili condițiile în care ecuația (11′) admite rădăcini în $[-1 ; 1]$. Pentru aceasta facem substituția $y = \frac{t-1}{t+1}$, și datorită tabelului:

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y		$+$	|	$-$	0	$+$	

sîntem în măsură să stabilim apartenența, sau neapartenența, valorilor lui t la intervalul $[-1 ; 1]$, după semnele valorilor lui y.

Din $y = \frac{t-1}{t+1}$, deducem $t = \frac{y+1}{1-y}$ și înlocuind în ecuația (11′), rezultă

$$my^2 + 2(3m-2)y - (m-2) = 0. \qquad (11'')$$

Discriminantul ecuației (11″) este $\Delta' = (3m-2)^2 + m(m-2) = 2(m-1)(5m-2)$, deci $\Delta = \Delta'$ (a se vedea observația făcută la exemplul anterior).

Dacă y_1, y_2 sînt rădăcinile ecuației (11″) deducem:

$$P = y_1 y_2 = \frac{-(m-2)}{m};\quad S = y_1 + y_2 = \frac{-2(3m-2)}{m}.$$

Evident am presupus $m \neq \frac{1}{3}$ și, datorită ecuației (11″), $m \neq 0$. Pentru aceste valori ale lui m, înlocuind în (11′), rezultă:

— pentru $m = \frac{1}{3}$ ecuația are gradul unu și admite rădăcina $t_0 = -\frac{3}{2} \notin [-1; 1]$;

— pentru $m=0$ ecuația admite rădăcinile $-1 \in [-1; 1]$ și $3 \notin [-1; 1]$.

Tabelul numărul 2, sintetizează rezultatele obținute, permițîndu-se următoarele concluzii în legătură cu ecuația (11):

(1) $m \in (-\infty; 0] \cup \{1\} \cup (2; +\infty)$ — ecuația admite o singură familie de soluții;

(2) $m \in (0; 1)$ — ecuația nu admite soluții;

(3) $m \in (1; 2)]$ — ecuația admite două familii de soluții.

m	Δ	P	S	Ecuația în y	Ecuația în t
$-\infty$					
	+	−	−	Rădăcini reale dif. $y_1<0<y_2$	Rădăcini reale dif. $t_1 \in (-1;1)$, $t_2 \notin [-1,1]$
0	=	=	=		$t_1=-1 \in [-1;1]$, $t_2 \notin [-1;1]$
	+	+	+	Rădăcini reale dif. $y_1>0$, $y_2>0$	Rădăcini reale dif. $t_1 \notin [-1,1]$, $t_2 \notin [-1,1]$
1/3	=	=	=		Ec. gr. I $t_0 \notin [-1;1]$
	+	+	+	Rădăcini reale dif. $y_1>0$, $y_2>0$	Rădăcini reale dif. $t_1 \notin [-1,1]$, $t_2 \notin [-1,1]$
2/5	0			$y_1=y_2>0$	$t_1=t_2 \notin [-1;1]$
	−	+	+	Rădăcini complexe conjugate	Rădăcini complexe conjugate
2/3			0		
	−		−		
1	0			$y_1=y_2<0$	$t_1=t_2 \in (-1;1)$
	+	+	−	Rădăcini reale diferite $y_1<0$, $y_2<0$	Rădăcini reale diferite $t_1 \in (-1;1)$, $t_2 \in (-1;1)$
2		0	−	$y_1<0=y_2$	$t_1 \in (-1;1)$, $t_2 \in [-1;1]$
	+	−	−	$y_1<0<y_2$	$t_1 \in (-1;1)$, $t_2 \notin [-1;1]$
$+\infty$					

TABELUL NR. 2

3.6. DIFERITE APLICAŢII

Exemple : 1) *Fie ecuaţia* $x^2 + px + q = 0$ *ale cărei rădăcini sînt* x_1 *şi* x_2.

a) *Dacă* $p, q \in \mathbf{C}$, $q \neq 0$, *valorile raportului rădăcinilor sînt rădăcinile ecuaţiei*

$$q\lambda^2 + (2q - p^2)\lambda + q = 0.$$

b) *Dacă* $p, q \in \mathbf{R}$, $p^2 + q + k < 0$; k *fiind un număr real pozitiv, fixat, ecuaţia are rădăcini reale diferite.*

c) *Să se determine numerele* p *şi* q *în ipoteza* $x_1 = p$; $x_2 = q$.

Pentru a rezolva punctul a), notînd $\lambda = \frac{x_1}{x_2}$ $(q \neq 0 \Rightarrow x_1x_2 \neq 0)$, putem scrie

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda x_2 \\ x_1 + x_2 = -p \end{array}\right\} \Rightarrow (1+\lambda)x_2 = -p \Rightarrow (1+\lambda)\lambda x_2 = -\lambda p \Rightarrow (1+\lambda)x_1 = -\lambda p.$$

Înmulţind parte cu parte relaţiile puse în evidenţă deducem $(1 + \lambda)^2 q = \lambda p^2$, sau $q\lambda^2 + (2q - p^2)\lambda + q = 0$.

Afirmaţia de la punctul b) este demonstrată dacă $\Delta = p^2 - 4q > 0$. Punînd $A = p^2 + q + k$, deducem $\Delta = p^2 - 4(A - p^2 - k) = 5p^2 + 4k - 4A > 0$, deoarece $k \geq 0$, $A < 0$.

Rezolvăm ultima chestiune utilizînd relaţiile lui Viète. Sîntem astfel conduşi la rezolvarea sistemului :

$$p + q = -p; \quad pq = q.$$

Datorită ecuaţiei a doua a sistemului deducem $p = 1$ sau $q = 0$ şi avînd în vedere prima ecuaţie putem scrie $p = 1 \Rightarrow q = -2$, $p = 0 \Rightarrow q = 0$. Deci soluţiile problemei sînt $(p = 0; q = 0)$ şi $(p = 1; q = -2)$.

2) *Ecuaţia* $x^2 + 2x - a = 0$, $a \in \mathbf{C} \setminus \{-1; 0\}$, *are rădăcinile* x_1 *şi* x_2. *Să se formeze ecuaţia de gradul doi, avînd rădăcinile* y_1 *şi* y_2, *în fiecare din ipotezele :*

$$(1)\quad y_1 = \frac{1 + x_1}{x_2}, \quad y_2 = \frac{1 + x_2}{x_1};$$

$$(2)\quad y_1 = \frac{1 - x_1}{1 + x_2}, \quad y_2 = \frac{1 - x_2}{1 + x_1}.$$

Facem observaţia că am propus două probleme de acelaşi tip pentru a prezenta două moduri de rezolvare diferite, cititorul avînd posibilitatea de a alege, de la caz la caz, modul de lucru.

Pentru a rezolva prima problemă vom observa că ecuația cerută este

$$y^2 - (y_1 + y_2)y + y_1y_2 = 0.$$

Deoarece $x_1 + x_2 = -2$; $x_1x_2 = -a$, putem scrie:

$$y_1 + y_2 = \frac{1 + x_1}{x_2} + \frac{1 + x_2}{x_1} = \frac{1}{x_1x_2}(x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2) =$$

$$= \frac{1}{x_1x_2}[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + (x_1 + x_2)] = -\frac{2(a + 1)}{a};$$

$$y_1y_2 = \frac{(1 + x_1)(1 + x_2)}{x_1x_2} = \frac{x_1x_2 + (x_1 + x_2) + 1}{x_1x_2} = \frac{a + 1}{a}.$$

deci ecuația în y este $ay^2 + 2(a + 1)y + (a + 1) = 0$.

Vom rezolva problema (2) exprimînd y_1 în funcție numai de una dintre rădăcinile ecuației în x. Deducem:

$$y = \frac{1 - x_1}{1 + x_2} = \frac{x_1 - x_1^2}{x_1 + x_1x_2} = \frac{x_1 + 2x_1 - a}{x_1 - a}.$$

(S-a înlocuit $x_1^2 = a - 2x_1$, obținut din $x_1^2 + 2x_1 - a = 0$.)

Deci $y_1 = \frac{3x_1 - a}{x_1 - a}$ și evident $y_2 = \frac{3x_2 - a}{x_2 - a}$. Sîntem astfel conduși la substituția $y = \frac{3x - a}{x - a}$, de unde rezultă $x = a \cdot \frac{y - 1}{y - 3}$. Înlocuind în ecuația în x putem scrie succesiv:

$$a^2(y - 1)^2 + 2a(y - 1)(y - 3) - a(y - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow a(y^2 - 2y + 1) +$$
$$+ 2(y^2 - 4y + 3) - (y^2 - 6y + 9) = 0 \Leftrightarrow (a + 1)y^2 - 2(a + 1)y +$$
$$+ (a - 3) = 0.$$

3) *Ecuațiile:*

$$x^2 - 2mx + m + 2 = 0;\quad mx^2 + 2(2m - 1)x + 1 = 0,$$

unde m este un parametru real nenul, au rădăcinile a, b și respectiv α, β. Să se determine numerele x_1 și x_2 care îndeplinesc condițiile:

$$\frac{x_1 - a}{x_1 - b} + \frac{x_2 - a}{x_2 - b} = 0;\quad \frac{x_1 - \alpha}{x_1 - \beta} + \frac{x_2 - \alpha}{x_2 - \beta} = 0.$$

Să se interpreteze geometric rezultatul obținut.

Notăm:

$$S_1 = a + b;\ P_1 = ab;\ S_2 = \alpha + \beta;\ P_2 = \alpha\beta;\ S = x_1 + x_2;\ P = x_1x_2.$$

Relațiile din enunț se scriu respectiv:

$$2(P + P_1) - SS_1 = 0 ; \; 2(P + P_2) - SS_2 = 0.$$

Înlocuind: $S_1 = 2m$; $P_1 = m + 2$; $S_2 = \frac{-2(2m-1)}{m}$, $P_2 = \frac{1}{m}$, obținem sistemul:

$$\begin{cases} mS - P = m + 2 \\ (2m - 1)S + mP = -1 \end{cases} \qquad (12)$$

Determinantul sistemului este

$$D = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 2m-1 & m \end{vmatrix} = m^2 + 2m - 1.$$

Dacă $m^2 + 2m - 1 = 0$, deducem și

$$\begin{vmatrix} m & m+2 \\ 2m-1 & -1 \end{vmatrix} = -2(m^2 + 2m - 1) = 0,$$

deci sistemul (12) este compatibil nedeterminat. Soluție a sistemului este orice pereche ordonată de numere complexe $(S ; P)$, unde S este arbitrar, iar $P = mS - m - 2$ (În acest caz ecuațiile din enunț au aceleași rădăcini.)

Dacă $m^2 + 2m - 1 \neq 0$ sistemul (12) are soluția unică:

$$S = 1 ; \; P = -2$$

deci x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației $x^2 - x - 2 = 0$. Deducem $x_1 = -1$; $x_2 = 2$.

Facem observația că pentru $m \in (-\infty ; -1) \cup (2 ; +\infty)$, fiecare dintre ecuațiile date are rădăcini reale diferite. Condițiile din enunț exprimă că punctele $S(x_1 ; 0)$ și $T(x_2 ; 0)$ sînt conjugate armonic cu punctele $A(a ; 0)$ și $B(b ; 0)$, de asemenea, sînt conjugate armonic și cu punctele $C(\alpha ; 0)$, $D(\beta ; 0)$. (Reamintim că punctele S și T se zic conjugate armonic cu punctele A și B, dacă punctele S și T determină pe segmentul $[AB]$ rapoarte de valori opuse.)

4) *Să se rezolve ecuația:*

$$(m + 1)x^2 - 6mx + 3(3m + 1) = 0, \; m \in \mathbb{C} \setminus \{-1\},$$

în fiecare din ipotezele:

(1) $3x_1 - x_2 = 1$; (2) $2x_1^2 - x_2 = 3$; (3) $S_3 + 3S_2 - 4S_1 - 6S_0 = 0$,

unde x_1, x_2 *sînt rădăcinile ecuației și* $S_k = x_1^k + x_2^k$ $(k = 0 ; 1 ; 2 ; 3)$.

În prima ipoteză sîntem conduși la rezolvarea sistemului:

$$3x_1 - x_2 = 1\ ;\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}\ ;\ x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

$$(a = m + 1\ ;\ b = -6m\ ;\ c = 3(3m + 1)).$$

Din primele două ecuații deducem:

$$x_1 = \frac{a - b}{4a}\ ;\ x_2 = \frac{-(a + 3b)}{4a}$$

și înlocuind în ultima ecuație a sistemului rezultă:

$$(b - a)(a + 3b) = 16ac,$$

deci

$$(7m + 1)(17m - 1) = 48(m + 1)(3m + 1).$$

Se obține astfel ecuația:

$$25m^2 + 182m + 49 = 0,$$

ale cărei rădăcini sînt -7 și $-\frac{7}{25}$.

Pentru $m = -7$ rezultă $x \in \{2\ ;\ 5\}$ și pentru $m = -\frac{7}{25}$ rezultă $x \in \left\{-2\ ;\ -\frac{1}{3}\right\}$.

În ipoteza (2) obținem sistemul:

$$2x_1^2 - x_2 = 3\ ;\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}\ ;\ x_1x_2 = \frac{c}{a},$$

a cărui rezolvare implică unele dificultăți de calcul datorate primei ecuații. Pentru simplificarea rezolvării, să observăm că x_1, fiind rădăcină a ecuației propuse, verifică egalitatea $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$, deci $x_1^2 = -\frac{1}{a}(bx_1 + c)$. Înlocuind în prima ecuație a sistemului deducem $-\frac{2}{a}(bx_1 + c) - x_2 = 3$, deci $2bx_1 + ax_2 = -3a - 2c$. Sîntem astfel conduși la rezolvarea sistemului:

$$2bx_1 + ax_2 = -3a - 2c\ ;\ ax_1 + ax_2 = -b\ ;\ x_1x_2 = \frac{c}{a}. \qquad (13)$$

Eliminînd x_1 între primele două ecuaţii ale sistemului (13) deducem $a(2b-a)x_2 = 3a^2 - 2b^2 + 2ac$. Eliminînd x_2 între aceleaşi ecuaţii deducem şi $(2b-a)x_1 = -3a + b - 2c$. Înmulţind, parte cu parte, ecuaţiile obţinute rezultă:

$$a(2b-a)^2 x_1 x_2 = (-3a + b - 2c)(3a^2 - 2b^2 + 2ac),$$

şi — avînd în vedere ultima ecuaţie a sistemului (13) — obţinem:

$$c(2b-a)^2 = (-3a + b - 2c)(3a^2 - 2b^2 + 2ac). \qquad (13')$$

Deoarece: $2b - a = -(13m+1)$, $-3a + b - 2c = -9(3m+1)$; $3a^2 - 2b^2 + 2ac = 3(-17m^2 + 10m + 3)$ ecuaţia (13′) se scrie:

$$(3m+1)(4m^2 + 29m + 7) = 0,$$

de unde deducem $m \in \left\{-7;\ -\frac{1}{3};\ -\frac{1}{4}\right\}$. Înlocuind pe rînd, valorile obţinute pentru m în ecuaţia din enunţ; obţinem soluţiile problemei propuse:

$$(m = -7;\ x_1 = 2;\ x_2 = 5);\ \left(m = -\frac{1}{3};\ x_1 = 0;\ x_2 = 3\right);$$

$$\left(m = -\frac{1}{4};\ x_1 = x_2 = -1\right).$$

În ipoteza (3) vom observa că putem scrie:

$$S = x_1^0 + x_2^0 = 2;\ S_1 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};$$

$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2;$$

$$S_3 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2].$$

Substituind:

$$x_1 + x_2 = \frac{6m}{m+1};\ x_1x_2 = \frac{3(3m+1)}{m+1},$$

deducem:

$$S_2 = \frac{6(3m^2 - 4m - 1)}{(m+1)^2};\ S_3 = \frac{54m(m^2 - 4m - 1)}{(m+1)^3}.$$

Înlocuind în ecuaţia din enunţ, rezultă:

$$12m^3 - 53m^2 - 34m - 5 = 0,$$

ecuație ale cărei rădăcini sînt : $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{4}$; 5. Procedînd ca în cazul anterior deducem soluțiile problemei :

$$\left(m=-\frac{1}{3};\ x_1=-3;\ x_2=0\right);\ \left(m=-\frac{1}{4};\ x_1=x_2=-1\right);$$

$$\left(m=5;\ x_1=\frac{5+i\sqrt{7}}{2};\ x_2=\frac{5-i\sqrt{7}}{2}\right).$$

5) *Fie ecuația :*

$$(mp+m-p+1)x^2+(p-1)(m+2)x-m(3p-1)=0,$$

unde m, p sînt parametri complecși și $mp+m-p+1\neq 0$.

a) *Să se determine valorile parametrului p dacă ecuația are cel puțin o rădăcină independentă de m.*

b) *Să se determine valorile parametrului m dacă ecuația are cel puțin o rădăcină independentă de p.*

Să se rezolve ecuația în ambele cazuri.

Pentru primul caz vom observa că ecuația se scrie :

$$m[(p+1)x^2+(p-1)x+1-3p]+[(1-p)x^2+2(p-1)x]=0,$$
$$\forall m[m\in\mathbb{C}], \qquad (14)$$

deci va trebui să determinăm $x\in\mathbb{C}$ care verifică simultan ecuațiile :

$$(p+1)x^2+(p-1)x+1-3p=0;\ (p-1)(x^2-2x)=0. \qquad (14')$$

Dacă $p=1$, ecuația a doua a sistemului (14′) este identic verificată iar din prima ecuație, a aceluiași sistem, rezultă $x\in\{-1;\ 1\}$. Deci pentru $p=1$ ecuația din enunț admite ambele rădăcini independente de m ($x_1=-1$; $x_2=1$).

Dacă $p\neq 1$ din a doua ecuație a sistemului (14′) rezultă $x=0$ sau $x=2$. Pentru $x=0$ deducem din prima ecuație $p=\frac{1}{3}$ și pentru $x=2$, din aceeași ecuație obținem $p=-1$. Înlocuind $p=\frac{1}{3}$ în ecuația (14,) aceasta devine

$$m(2x^2-x)+(x^2-2x)=0,$$

deci cea de a doua soluție a ecuației (s-a găsit o soluție $x=0$, independentă de m) este :

$$x=\frac{m+2}{2m+1}.$$

(Se va observa că $p=\frac{1}{3}\Rightarrow m\neq-\frac{1}{2}$, în condițiile enunțului.)

Procedînd analog şi în cazul $p = -1$, se găseşte a doua soluţie a ecuaţiei $x = m$.

În concluzie:

$$p = 1 \Rightarrow x \in \{-1 ; 1\} ;$$

$$p = \frac{1}{3} \Rightarrow x \in \left\{0 ; \frac{m+2}{2m+1}\right\} ;$$

$$p = -1 \Rightarrow x \in \{2 ; m\}.$$

Pentru a rezolva punctul b) al problemei vom observa că putem scrie:

$$p[(m-1)x^2 + (m+2)x - 3m] + [(m+1)x^2 - (m+2)x + m] = 0, \quad \forall p[p \in \mathbb{C}], \qquad (14'')$$

ceea ce conduce la rezolvarea sistemului.

$$(m-1)x^2+(m+2)x-3m=0 ; \ (m+1)x^2-(m+2)x+m=0. \qquad (14''')$$

Adunînd între ele, parte cu parte, cele două ecuaţii, deducem

$$m(x^2 - 1) = 0.$$

Dacă $m = 0$, din sistemul (14''') rezultă $x \in \{0 ; 2\}$. Dacă $m \neq 0$ rezultă $x = -1$ sau $x = 1$. Înlocuind $x = 1$ în prima ecuaţie a sistemului (14''') deducem $m = 1$ şi procedînd ca în cazul precedent din ecuaţia (14'') rezultă cea de a doua rădăcină $x = \frac{1-3p}{2}$. Analog, pentru $x = -1$ deducem $m = -1$ şi a doua rădăcină a ecuaţiei (14'') este $x = \frac{3p-1}{2p}$. Răspunsul la punctul b) al problemei este deci:

$$m = 0 \Rightarrow x \in \{0 ; 2\}$$

$$m = -1 \Rightarrow x \in \left\{-1 ; \frac{3p-1}{2p}\right\}$$

$$m = 1 \Rightarrow x \in \left\{1 ; \frac{1-3p}{2}\right\}.$$

6) *Să se discute natura şi semnele rădăcinilor reale ale ecuaţiei:*

$$(2m + 1)x^3 - 3x^2 - 3x + (2m + 1) = 0, \ m \in \mathbb{R}.$$

Pentru rezolvare vom observa că ecuaţia din enunţ (ecuaţie reciprocă de gradul 3) se mai scrie sub forma:

$$(x + 1)[(2m + 1)x^2 - 2(m + 2)x + (2m + 1)] = 0.$$

Rezultă că oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$ ecuația admite rădăcina $x_1 = -1$, în continuare problema reducîndu-se la discutarea naturii și semnelor rădăcinilor reale ale ecuației de gradul doi:

$$(2m + 1)x^2 - 2(m + 2)x + (2m + 1) = 0, \quad m \in \mathbb{R}. \qquad (15)$$

Dacă $m \neq -\frac{1}{2}$, discriminantul ecuației este $\Delta = (m + 2)^2 - (2m + 1)^2 = 3(1 - m^2)$. În plus, x_2 și x_3 fiind rădăcinile ecuației, avem și:

$$P = x_1 x_2 = 1; \quad S = x_1 + x_2 = \frac{2(m + 2)}{2m + 1}.$$

Pentru $m = -\frac{1}{2}$ ecuația (15) are gradul întîi și rădăcina $x = 0$.

Sintetizînd în tabelul numărul 3 observațiile asupra ecuației (15), răspunsul pentru problema propusă este următorul:

$m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ — ecuația admite o rădăcină reală $x_1 = -1$ și două rădăcini complexe conjugate;

$m = -1$ — ecuația admite trei rădăcini reale egale ($x_1 = x_2 = x_3 = -1$);

$m = 1$ — ecuația admite trei rădăcini reale; $x_1 = -1$; $x_2 = x_3 = 1$;

$m \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ — ecuația admite trei rădăcini reale $x_1 = -1$; $x_2 < x_3 < 0$;

$m = -\frac{1}{2}$ — ecuația admite două rădăcini reale $x_1 = -1$; $x_2 = 0$;

$m \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ — ecuația admite trei rădăcini reale $x = -1$; $x_2 > x_3 > 0$.

7) *Să se discute natura și semnele rădăcinilor reale ale ecuației*

$$mx^4 + 2m(m - 2)x^2 + 5m - 4 = 0, \quad m \in \mathbb{R}^*.$$

Pentru rezolvare, vom observa că notînd $x^2 = y$, sîntem iarăși conduși la discutarea naturii și semnelor rădăcinilor reale ale unei ecuații de gradul doi:

$$my^2 + 2m(m - 2)y + 5m - 4 = 0, \quad m \in \mathbb{R}^*. \qquad (16)$$

Discriminantul ecuației (16) este $\Delta = m^2(m-2)^2 - m(5m-4) = m^4 - 4m^3 - m^2 + 4m = m(m+1)(m-1)(m-4)$. Rădăcinile aceleiași ecuații fiind y_1 și y_2 avem și:

$$S = y_1 + y_2 = -2(m-2)\,;\; P = y_1 y_2 = \frac{5m-4}{m}\,.$$

Rezultatele referitoare la ecuația (16) sînt prezentate în tabelul numărul 4. Deoarece rădăcinile ecuației din enunț sînt:

$$x_1 = -\sqrt{y_1}\,;\; x_2 = \sqrt{y_1}\,;\; x_3 = -\sqrt{y_2}\,;\; x_4 = \sqrt{y_2},$$

m	Δ	P	S	Natura și semnele rădăcinilor ecuației (15)	
$-\infty$					
	−	+	+	Rădăcini complexe conjugate	
-2	−	+	0		
-1	0		−	$x_2 = x_3 = -1$	
	+	+	−	Rădăcini reale diferite	$x_2 < x_3 < 0$
$-1/2$	=	=	=	Ecuație de gr. I $x_2 = 0$	
	+	+	+	Rădăcini reale diferite	$x_2 > x_3 > 0$
1	0			$x_2 = x_3 = 1$	
	−	+	+	Rădăcini complexe conjugate	
$-\infty$					

TABELUL NR. 3

m	Δ	P	S	Natura și semnele rădăcinilor ecuației (16)	
$-\infty$					
	+	+	+	Răd. reale dif.	$y_1 > y_2 > 0$
-1	0				$y_1 = y_2 > 0$
	−	+	+	Rădăcini complexe conjugate	
0	=	=	=		
		−	+	Rădăcini reale diferite	$y_1 < 0 < y_2$
$4/5$	+	0	+		$y_1 = 0,\ y_2 > 0$
					$y_1 > y_2 > 0$
1	0	+	+		$y_1 = y_2 > 0$
2	−	+	0	Rădăcini complexe conjugate	
4	0	+	−		$y_1 = y_2 < 0$
	+	+	−	Răd. reale diferite	$y_1 < y_2 < 0$
$+\infty$					

TABELUL NR. 4

răspunsul la problema propusă este următorul:

$m \in (-\infty\,;\,-1) \cup \left(\frac{4}{5}\,;\,1\right)$ — ecuația are patru rădăcini reale diferite, două din ele fiind opuse celorlalte două;

$m \in \{-1\,;\,1\}$ — ecuația are patru rădăcini reale, $x_1 = x_3 = -x_2 = -x_4$;

$m \in (-1;0) \cup (1;4) \cup (4;+\infty)$ — ecuaţia are patru rădăcini complexe, două din ele fiind conjugate respectiv celorlalte două;

$m \in \left(0; \frac{4}{5}\right)$ — ecuaţia are două rădăcini reale opuse şi două rădăcini complexe conjugate;

$m = \frac{4}{5}$ — ecuaţia are patru rădăcini reale $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = -x_4$;

$m = 4$ — ecuaţia are patru rădăcini complexe $x_1 = x_3$; $x_2 = x_4$.

8) *Dintre toate triunghiurile dreptunghice înscrise în acelaşi cerc, să se determine triunghiul de perimetru maxim.*

Fie R lungimea razei cercului. Deoarece ipotenuza triunghiului dreptunghic înscris în cerc este un diametru al cercului, rezultă că lungimea ipotenuzei este $2R$. Lungimea unei catete fiind x, cealaltă catetă are lungimea $\sqrt{4R^2 - x^2}$. În fine, dacă $2p$ este perimetrul, rezultă:

$$2p = 2R + x + \sqrt{4R^2 - x^2}$$

de unde obţinem ecuaţia:

$$x^2 - 2(p - R)x + 2p(p - 2R) = 0. \qquad (17)$$

Pentru ca ecuaţia (17) să admită rădăcinile reale este necesar şi suficient să avem:

$$\Delta = (p - R)^2 - 2(p^2 - 2pR) \geqslant 0,$$

de unde deducem:

$$p^2 - 2pR - R^2 \leqslant 0,$$

ceea ce conduce la:

$$0 < \frac{p}{R} \leqslant 1 + \sqrt{2}.$$

Deoarece $p \leqslant R(1 + \sqrt{2})$ rezultă $p_{max} = R(1 + \sqrt{2})$ şi în acest caz ecuaţia (17) are rădăcina dublă

$$x_0 = p_{max} - R = R\sqrt{2},$$

deci triunghiul este isoscel.

Am demonstrat astfel că dintre toate triunghiurile dreptunghice înscrise în acelaşi cerc, triunghiul de perimetru maxim este triunghiul dreptunghic isoscel.

§ 4. ECUAȚII ALGEBRICE DE GRAD MAI MARE DECÎT DOI

4.1. UNELE TRANSFORMATE ALE ECUAȚIILOR ALGEBRICE

Pentru o mai bună înțelegere a celor ce urmează vom începe prin prezentarea unor proprietăți ale funcției:

$$f : \mathbf{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbf{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\},\ f(t) = \frac{at + b}{ct + d}, \qquad (18)$$

unde a, b, c, d sînt numere complexe astfel încît $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$.

Deoarece:

$$f(t_1) = f(t_2) \Rightarrow \frac{at_1 + b}{ct_1 + d} = \frac{at_2 + b}{ct_2 + d} \Rightarrow \frac{(ad - bc)(t_1 - t_2)}{(ct_1 + d)(ct_2 + d)} = 0 \Rightarrow t_1 = t_2,$$

rezultă că funcția este injectivă.

În plus dacă $z \in \mathbf{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$, deducem:

$$f(t) = z \Leftrightarrow \frac{at + b}{ct + d} = z \Rightarrow (cz - a)t = b - dz \Rightarrow t = \frac{b - dz}{cz - a} \in \mathbf{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\},$$

ceea ce demonstrează surjectivitatea funcției f.

Atribuind diferite valori parametrilor a, b, c, d, obținem din (18) forme particulare, printre care:

$$f(t) = t + h (h \in \mathbf{C});\ f(t) = kt\ (k \in \mathbf{C}^*);\ f(t) = -t;\ f(t) = \frac{1}{t}. \qquad (18')$$

Fie polinomul:

$$p = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbf{C}[X],\ n \geqslant 1,\ a_n \neq 0.$$

Dacă în ecuația $p(z) = 0$, atașată polinomului p, substituim $z = f(t)$, obținem ecuația:

$$a_n(at + b)^n + a_{n-1}(at + b)^{n-1}(ct + d) + \ldots + a_1(at + b)(ct + d)^{n-1} +$$
$$+ a_0(ct + d)^n = 0.$$

numită „ecuația transformată în $f(t)$" (pe scurt „transformata în $f(t)$") a ecuației $p(z) = 0$.

Se observă că dacă $\frac{a}{c}$ este o rădăcină a ecuației $p(z) = 0$, gradul transformatei este strict mai mic decît n, iar dacă $\frac{a}{c}$ nu este rădăcină a ecuației $p(z) = 0$, gradul transformatei este n.

Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n$, rădăcinile ecuației $p(z)=0$. În legătură cu cazurile particulare (18'), facem observația că relațiile:

$$z = t + h,\ z = kt\ (k \in \mathbf{C}^*),\ z = -t,\ z = \frac{1}{t}.$$

permit obținerea de informații asupra rădăcinilor transformatei. Deducem:

– rădăcinile transformatei în $t + h$ sînt $z_1 - h, z_2 - h, \ldots, z_n - h$,

– rădăcinile transformatei în kt sînt $\frac{1}{k}z_1, \frac{1}{k}z_2, \ldots, \frac{1}{k}z_n$,

– rădăcinile transformatei în $-t$ sînt $-z_1, -z_2, \ldots, -z_n$,

– rădăcinile transformatei în $\frac{1}{t}$ sînt $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \ldots, \frac{1}{z_n}$, dacă $a_0 \neq 0$.

Prezentăm în continuare două probleme, a căror rezolvare este mult ușurată datorită utilizării ecuațiilor transformate.

Exemple: 1) *Să se rezolve ecuația $p(z) = 0$, unde*

$$p = X^4 - 7X^3 + 15X^2 - 7X - 6,$$

știind că diferența a două rădăcini este 1.

Abordarea problemei cu ajutorul relațiilor între rădăcini și coeficienți nu este recomandabilă, datorită dificultăților de calcul ce se întîmpină în rezolvarea sistemului care rezultă. O soluție, mai economică din punct de vedere al calculelor, este cea care urmează.

Conform enunțului rădăcinile ecuației $p(z) = 0$ sînt $a, a - 1, b, c$. Deci ecuația $p(z + 1) = 0$ are rădăcinile $a - 1, a - 2, b - 1, c - 1$. Rezultă că ecuațiile $p(z) = 0$ și $p(z + 1) = 0$ admit rădăcina comună $a - 1$. Deoarece $p(z + 1) = z^4 - 3z^3 + 6z - 4$, sîntem conduși la a afla un cel mai mare divizor comun al polinoamelor p și $q = X^4 - 3X^3 + 6X - 4$. Găsim $X - 2$, deci $a - 1 = 2$, sau $a = 3$ și se cunosc astfel două rădăcini ale ecuației $p(z) = 0$. Acestea sînt $a = 3$ și $a - 1 = 2$. În continuare se află și rădăcinile $b = 1 - \sqrt{2}$; $c = 1 + \sqrt{2}$.

Propunem ca exercițiu rezolvarea ecuației $z^4 + 6z^3 + 17z^2 + 24z + 18 = 0$, cunoscînd că diferența a două rădăcini este 1.

2) *Fie $p = X^3 - 3mX^2 - 9X + 7m \in \mathbf{C}[X]$. Să se rezolve ecuația $p(z) = 0$, cunoscînd că produsul a două rădăcini este* -2.

Vom observa, întîi, că pentru $m = 0$, ecuația $p(z) = 0$ admite rădăcinile -3; 0; 3 și condițiile enunțului nu sînt verificate. Putem deci presupune $m \neq 0$ și în acest caz $p(0) \neq 0$.

Dacă a, $-\frac{2}{a}$ și b sînt rădăcinile ecuației $p(z) = 0$, rădăcinile transformatei în $-\frac{2}{z}$ sînt $-\frac{2}{a}$, a și $-\frac{2}{b}$, deci ecuațiile:

$$z^3 - 3mz^2 - 9z + 7m = 0 \text{ și } 7mz^3 + 18z^2 - 12mz - 8 = 0 \quad (19)$$

admit două rădăcini comune.

Sîntem astfel conduşi la rezolvarea sistemului (19), necunoscutele fiind m şi z. Prin eliminarea lui m între cele două ecuaţii, rezultă :

$$z^6 - 3z^4 - 6z^2 + 8 = 0,$$

ecuaţie ale cărei rădăcini sînt : -2; -1; 1; 2; $i\sqrt{2}$; $-i\sqrt{2}$.

Deducem că sistemul (19) are soluţiile :

$$(2; -2), (-2; 2), (-2; 1), (2; -1), \left(\frac{11i\sqrt{2}}{13}; i\sqrt{2}\right),$$

$$\left(-\frac{11i\sqrt{2}}{13}; -i\sqrt{2}\right).$$

Deci pentru $m = 2$ ecuaţia $p(z) = 0$ are rădăcinile -2; 1; 7 şi pentru $m = -2$ are rădăcinile 2; -1; -7. Pentru celelalte valori ale parametrului m condiţiile enunţului nu sînt îndeplinite.

Ca exerciţiu, propunem spre rezolvare ecuaţia $z^3 - 3(2m + 1)z^2 + 6(2m - 1)z + 8(m + 1) = 0$, $m \in \mathbb{C}$, ştiind că diferenţa a două rădăcini este 3.

4.2. OBSERVAŢII ASUPRA UNOR FUNCŢII POLINOMIALE SIMETRICE ŞI APLICAŢII ALE RELAŢIILOR ÎNTRE RĂDĂCINILE ŞI COEFICIENŢII UNEI ECUAŢII ALGEBRICE

Fie polinomul :

$$p = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X],\ n \geq 1,\ a_n \neq 0,\ a_0 \neq 0.$$

avînd rădăcinile $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Putem deci scrie şi

$$p = a_n(X - z_1)(X - z_2)\ldots(X - z_n).$$

Facem următoarele notaţii :

$$S_h = z_1^h + z_2^h + \ldots + z_n^h,\ h \in \mathbb{Z};$$

Putem scrie :

$$a_n(X - z_2)(X - z_3)\ldots(X - z_n) = \frac{p}{X - z_1};$$

$$a_n(X - z_1)(X - z_2)\ldots(X - z_{n-1}) = \frac{p}{X - z_n};$$

$$a_n(X - z_1)(X - z_2)\ldots(X - z_{k-1})(X - z_{k+1})\ldots(X - z_n) =$$

$$= \frac{p}{X - z_k} \qquad (1 < k < n).$$

Dp fiind derivata formală a polinomului p, avem:

$$Dp = \frac{p}{x - z_1} + \frac{p}{x - z_2} + \ldots + \frac{p}{x - z_n} \tag{20}$$

şi

$$Dp = na_nX^{n-1} + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + \ldots + 2a_2X + a_1. \tag{20'}$$

Deoarece $X - z_k \mid p$, oricare ar fi $k = 1, 2, \ldots, n$, utilizînd schema lui Hörner-Ruffini, deducem:

$$\frac{p}{X - z_k} = a_nX^{n-1} + (a_nz_k + a_{n-1})X^{n-2} + (a_nz_k^2 + a_{n-1}z_k + a_{n-2})X^{n-3} + \ldots + (a_nz_k^{n-1} + a_{n-1}z_k^{n-2} + \ldots + a_2z_k + a_1)$$

şi din (20), rezultă:

$$Dp = na_nX^{n-1} + (a_nS_1 + na_{n-1})X^{n-2} + (a_nS_2 + a_{n-1}S_1 + na_{n-2})X^{n-3} + \ldots + (a_nS_{n-1} + a_{n-1}S_{n-2} + \ldots + a_2S_1 + na_1) = 0. \tag{20''}$$

Din (20′) şi (20″) deducem următoarele relaţii:

$$\begin{cases} a_nS_1 + a_{n-1}S_0 = (n-1)a_{n-1} \\ a_nS_2 + a_{n-1}S_1 + a_{n-2}S_0 = (n-2)a_{n-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nS_{n-1} + a_{n-1}S_{n-2} + \ldots + a_2S_1 + a_1S_0 = a_1, \end{cases} \tag{20'''}$$

datorate lui I. Newton.

Evidenţiem că relaţiile (20‴) dau posibilitatea calculării sumelor S_k pentru toate valorile lui k de la 1 la $n - 1$.

Să observăm acum că putem scrie $p(z_1) = p(z_2) = \ldots = p(z_n) = 0$, deci:

$$\begin{aligned} a_nz_1^n + a_{n-1}z_1^{n-1} + \ldots + a_1z_1 + a_0 &= 0; \\ a_nz_2^n + a_{n-1}z_2^{n-1} + \ldots + a_1z_2 + a_0 &= 0; \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad & \\ a_nz_n^n + a_{n-1}z_n^{n-1} + \ldots + a_1z_n + a_0 &= 0. \end{aligned}$$

Înmulţind ambele părţi ale acestor egalităţi, respectiv cu z_1^{k-n}, z_2^{k-n}, ..., z_n^{k-n}, unde $k \in \mathbb{Z}$ şi adunînd parte cu parte egalităţile obţinute, deducem relaţia de recurenţă:

$$a_nS_k + a_{n-1}S_{k-1} + \ldots + a_1S_{k-n+1} + a_0S_{k-n} = 0, \ k \in \mathbb{Z}. \tag{21}$$

În concluzie relațiile (20''') și relația de recurență (21) oferă posibilitatea calculării sumelor S_k, oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}$.

Pentru a demonstra utilitatea relațiilor (20''') și (21) să calculăm S_{-2} și S_5 în cazul:

$$p = X^4 + X^3 + X^2 - X + 1.$$

Deducem imediat $S_0 = 4$, $S_1 = -1$, $S_2 = (z_1 + z_2 + z_3 + z_4)^2 - 2(z_1z_2 + z_1z_3 + \ldots + z_3z_4) = 1 - 2 = -1$.

Din (20''') obținem $S_3 + S_2 + S_1 - S_0 = -1$ și avînd în vedere rezultatele de mai înainte — deducem $S_3 = 5$.

Fie acum relația de recurență:

$$S_k + S_{k-1} + S_{k-2} - S_{k-3} + S_{k-4} = 0,\ k \in \mathbb{Z}. \quad (22)$$

Punînd $k = 4$ rezultă $S_4 + S_3 + S_2 - S_1 + S_0 = 0$. Deci $S_4 = -9$.

Dînd, în aceeași relație (22), valoarea 5 lui k, avem $S_5 + S_4 + S_3 - S_2 + S_1 = 0$, de unde obținem $S_5 = 4$.

Dacă în (22) facem $k = 3$, rezultă $S_3 + S_2 + S_1 - S_0 + S_{-1} = 0$, de unde $S_{-1} = S_0 - S_1 - S_2 - S_3 = 1$.

În fine, pentru $k = 2$, deducem tot din (22): $S_2 + S_1 + S_0 - S_{-1} + S_{-2} = 0$ și de aici $S_{-2} = -1$.

În continuare prezentăm trei exemple de aplicare a relațiilor între rădăcini și coeficienți la rezolvarea unor probleme de algebră.

Exemple: 1) *Oricare ar fi numerele complexe a, b, c se verifică egalitatea:*

$$12[(a - b)^7 + (b - c)^7 + (c - a)^7] =$$

$$= 7[(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3][(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]^2.$$

Notînd $a - b = z_1$, $b - c = z_2$, $c - a = z_3$, să observăm că numerele z_1, z_2, z_3 sînt rădăcinile unei ecuații de forma:

$$z^3 + pz + q = 0. \quad (23)$$

Avem deci de demonstrat egalitatea $12S_7 = 7S_3 \cdot S_2^2$.

Scriind relația de recurență (21) pentru ecuația (23), dînd pe rînd lui k valorile 3, 4, 5, 7 și avînd în vedere $S_1 = 0$, $S_2 = -2p$, problema se rezolvă imediat.

2) *Să se rezolve sistemul:*

$$x + y + z = -1;\ x^2 + y^2 + z^2 = 9;\ x^3 + y^3 + z^3 = -1.$$

Notînd $x + y + z = p_1$, $xy + yz + zx = p_2$, $xyz = p_3$, numerele x, y, z, care verifică sistemul, sînt rădăcinile ecuației:

$$t^3 - p_1t^2 + p_2t - p_3 = 0. \quad (24)$$

Cunoaştem $S_1 = -1$, $S_2 = 9$, $S_3 = -1$. Deoarece $S_1 = p_1$, $S_2 = p_1^2 - 2p_2$, deducem $p_2 = -4$.

Relaţia de recurenţă (21), pentru ecuaţia (24) şi $k = 3$, conduce la:

$$S_3 - p_1 S_2 + p_2 S_1 - 3p_3 = 0.$$

Deducem de aici $p_3 = 4$.

Ecuaţia (24) se scrie acum $t^3 + t^2 - 4t - 4 = 0$ şi are rădăcinile $t_1 = -2$; $t_2 = -1$, $t_3 = 2$.

Deci sistemul propus pentru rezolvare are soluţiile $(-2; -1; 2)$; $(-2; 2; -1)$; $(-1; -2; 2)$; $(-1; 2; -2)$; $(2; -2; -1)$; $(2; -1; -2)$.

3) *Să se rezolve ecuaţia $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ($p, q, r \in \mathbb{C}$), ştiind că rădăcinile sînt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice şi trei termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.*

Dacă x_1, x_2, x_3 sînt cele trei rădăcini ale ecuaţiei, sîntem conduşi a face ipotezele:

a) $\begin{cases} \div x_1, x_2, x_3 \\ \because\!\because x_1, x_2, x_3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \div x_1, x_2, x_3 \\ \because\!\because x_1, x_3, x_2. \end{cases}$

(Se deduce imediat că celelalte situaţii, legate de ordinea rădăcinilor în progresia geometrică, conduc la una din ipotezele anterioare, reindexînd eventual rădăcinile.)

În prima ipoteză putem pune $x_1 = a - b$, $x_2 = a$, $x_3 = a + b$. Deoarece $x_2^2 = x_1 x_3$, deducem $a^2 = a^2 - b^2$, deci $b = 0$. Rezultă $x_1 = x_2 = x_3 = a$ şi ecuaţia din enunţ se scrie $(x - a)^3 = 0$, sau $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 = 0$, ceea ce conduce la:

$$p = -3a; \; q = 3a^2; \; r = -a^3. \tag{25}$$

Din prima relaţie (25) rezultă $a = -\frac{p}{3}$ şi înlocuind în celelalte două relaţii obţinem condiţia de rezolvabilitate a problemei:

$$p^2 - 3q = 0; \; p^3 - 27r = 0,$$

rădăcinile ecuaţiei fiind $x_1 = x_2 = x_3 = -\frac{p}{3}$.

În ipoteza b avem $x_1 = a - b$, $x_2 = a$, $x_3 = a + b$ şi din condiţia $x_3^2 = x_1 x_2$ deducem $b(b + 3a) = 0$. Deoarece $b = 0$ conduce la cazul rezolvat anterior, rezultă $b = -3a$, deci rădăcinile ecuaţiei sînt $x_1 = 4a$; $x_2 = a$; $x_3 = -2a$.

Utilizînd relaţiile între rădăcini şi coeficienţi, putem scrie:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = q \\ x_1x_2x_3 = -r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = -p \\ -6a^2 = q \\ -8a^3 = -r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{p}{3} \\ 2p^2 + 3q = 0 \\ 8p^3 + 27r = 0. \end{cases}$$

Deducem că pentru $2p^2 + 3q = 8p^3 + 27r = 0$ ecuația admite rădăcinile $x_1 = -\frac{4p}{3}$; $x_2 = -\frac{p}{3}$; $x_3 = \frac{2p}{3}$, verificînd ipoteza b).

4) *Să se rezolve* $x^3 + 3mx^2 - x - (11m + 8) = 0$, $m \in \mathbb{Z}$, *în fiecare din ipotezele :*

a) $x_1 + x_2 = x_3$; b) $x_1x_2 = 3$,

x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile ecuației.

Dacă $x_1 + x_2 = x_3$, cum $x_1 + x_2 + x_3 = -3m$, deducem $2x_3 = -3m$, deci $x_3 = -\frac{3m}{2}$.

Înlocuind $x_3 = -\frac{3m}{2}$ în ecuație deducem :

$$27m^3 - 76m - 64 = 0. \qquad (26)$$

Observînd că ecuația (26) admite rădăcina întreagă $m_1 = 2$ și două rădăcini $m_2, m_3 \in \mathbb{C}$, rezultă că ecuația din enunț se scrie în acest caz :

$$x^3 + 6x^2 - x - 30 = 0,$$

avînd rădăcina $x_3 = -3$. Se deduc imediat $x_1 = -5$; $x_2 = 2$.

În ipoteza b), utilizînd și relațiile între rădăcini și coeficienți, deducem sistemul :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -3m \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -1 \\ x_1x_2x_3 = 11m + 8 \\ x_1x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -3m & (a) \\ x_1x_3 + x_2x_3 = -4 & (b) \\ 3x_3 = 11m + 8 & (c) \\ x_1x_2 = 3. & (d) \end{cases}$$

Datorită ecuațiilor (a) și (b) deducem $x_3(-3m - x_3) = -4$, deci $x_3^2 + 3mx_3 - 4 = 0$ și substituind $x_3 = \frac{11m + 8}{3}$, din (c), rezultă :

$$55m^2 + 62m + 7 = 0. \qquad (26')$$

Ecuația (26′) are rădăcinile -1 și $-\frac{7}{55}$. Deoarece $m \in \mathbb{Z}$, rezultă $m = -1$, deci ecuația din enunț este

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0,$$

avînd rădăcina $x_3 = -1$. Celelalte rădăcini sînt $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

5) *Fie p un polinom de grad* $n \geq 2$, *cu coeficienți reali, avînd rădăcinile* $z_1, z_2, \ldots, z_n$, *diferite de zero și numărul natural* $k \in [1; n-1]$. *Notăm :*

$$A = \sum \bar{z}_{i_1} \cdot \bar{z}_{i_2} \ldots \bar{z}_{i_k} z_{i_{k+1}} \ldots z_{i_n},$$

suma fiind extinsă la toate permutările $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ *ale numerelor* 1, 2, ..., *n. Să se demonstreze că A este număr real.*

Fie pentru rezolvare polinomul:

$$q=\left(X-\frac{\bar z_1}{z_1}\right)\left(X-\frac{\bar z_2}{z_2}\right)\dots\left(X-\frac{\bar z_n}{z_n}\right)=X^n+b_1X^{n-1}+\dots+b_{n-1}X+b_n.$$

Dacă z_k, z_l sînt două rădăcini complexe conjugate ale polinomului p, putem scrie

$$\left(X-\frac{\bar z_k}{z_k}\right)\left(X-\frac{\bar z_l}{z_l}\right)=X^2-\left(\frac{\bar z_k}{z_k}+\frac{\bar z_l}{z_l}\right)X+\frac{\bar z_k\cdot\bar z_l}{z_k\cdot z_l}\in R[X],$$

deoarece numerele complexe $\frac{\bar z_k}{z_k}$ și $\frac{\bar z_l}{z_l}$ sînt conjugate.

Se deduce imediat $q\in R[X]$. Putem deci scrie:

$$A=(z_1z_2\dots z_n)\sum\frac{\bar z_{i_1}\bar z_{i_2}\dots\bar z_{i_k}}{z_{i_1}z_{i_2}\dots z_{i_k}}=(-1)^k b_k\, z_1z_2\dots z_n\in R.$$

4.3. APLICAȚII LA STABILIREA NUMĂRULUI RĂDĂCINILOR REALE ALE UNEI ECUAȚII ALGEBRICE CU COEFICIENȚI REALI

Pentru stabilirea numărului rădăcinilor reale ale unei ecuații algebrice cu coeficienți reali nu se poate indica un procedeu cu caracter general contribuția rezolvitorului fiind esențială pentru fiecare problemă în parte. În exemplele 1 și 2 vom prezenta rezolvarea a două probleme, utilizînd procedee care aparțin algebrei. În celelalte exemple vom apela, pentru rezolvare, la unele rezultate ale calculului diferențial .(O consecință a teoremei lui Rolle și metoda grafică.)

Exemple: 1) *Dacă a_1, a_2, a_3, a_4 sînt numere reale și $a_1<a_2<a_3<a_4$, să se arate că ecuația:*

$(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)+(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4)+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_4)+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)=0$ are toate rădăcinile reale.

Notînd prin $p(x)$ partea întîia a ecuației, deducem:

$$p(a_1)=(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)<0;$$
$$p(a_2)=(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)>0;$$
$$p(a_3)=(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)<0;$$
$$p(a_4)=(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)>0.$$

Deoarece $a_1<a_2$, $p(a_1)\cdot p(a_2)<0$, avînd în vedere continuitatea funcției $f:R\to R$, $f(x)=p(x)$, rezultă că ecuația $p(x)=0$ admite cel puțin o rădăcină reală în intervalul $(a_1;a_2)$. Procedînd în mod ana-

log, deducem că ecuația admite cel puțin o rădăcină reală în fiecare din intervalele $(a_2\,;\,a_3)$ și $(a_3\,;\,a_4)$. Gradul ecuației fiind 3, rezultă că ecuația are trei rădăcini reale x_1, x_2, x_3, îndeplinind condiția:

$$a_1 < x_1 < a_2 < x_2 < a_3 < x_3 < a_4.$$

Facem observația că în același mod se rezolvă problema dacă se consideră ecuația:

$$k(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4) + h(x - a_1)(x - a_3)(x - a_4) +$$

$$+ l(x - a_1)\cdot(x - a_2)(x - a_4) + m(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) = 0,$$ unde k, h, l, m sînt numere reale strict pozitive.

2) *Să se determine zerourile funcției* $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f_n(x) = 1 - \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x(x-1) + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}x(x-1)\ldots(x-n+1).$$

Vom observa că $f_1(x) = -(x-1)$, deci funcția f_1 are un singur zero $x_1 = 1$. În plus $f_2(x) = \frac{1}{2!}(x-1)(x-2)$, deci funcția f_2 are două zerouri $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$.

Sîntem astfel conduși la a face presupunerea:

$$f_k(x) = \frac{(-1)^k}{k!}(x-1)(x-2)\ldots(x-k), \text{ unde } k \in \mathbf{N}^*. \qquad (27)$$

Deducem

$$f_{k+1}(x) = f_k(x) + \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}(x-1)\ldots(x-k) =$$

$$= \frac{(-1)^k}{k!}(x-1)(x-2)\ldots(x-k) + \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}x(x-1)\ldots(x-k) =$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}(x-1)(x-2)\ldots(x-k)[-(k+1)+x],$$

deci

$$f_{k+1}(x) = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}(x-1)(x-2)\ldots(x-k)(x-k-1),$$

ceea ce confirmă că f_{k+1} este de forma (27).

Am demonstrat astfel egalitatea:

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}(x-1)(x-2)\ldots(x-n), \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

Rezultă că zerourile funcției f_n sînt numerele 1; 2; ...; n.

3) *Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației* $3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x - 20 = 0$ *din intervalul* $[-1 ; 3]$.

Pentru rezolvare vom aplica următoarea consecință a teoremei lui Rolle:

„Fie $f : (a ; b) \to \mathbf{R}$ derivabilă și $x_1 < x_2$ două zerouri consecutive, din $(a ; b)$, ale derivatei $f'(x)$. În aceste condiții:

— dacă $f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$, funcția nu se anulează pe $[x_1, x_2]$;

— dacă $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, funcția are un singur zero pe $(x_1 ; x_2)$".

În plus facem precizarea că dacă f este funcție polinomială și $f(x_1) = 0$, sau $f(x_2) = 0$, atunci x_1, respectiv x_2, este zero al funcției de ordin de multiplicitate strict mai mare ca unu.

Considerînd funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x - 20$ derivabilă pe domeniul ei de definiție, putem scrie $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 48x + 48$, deci:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2 ; 1 ; 2\}.$$

Deducem: $f(-2) = -132$; $f(1) = 3$; $f(2) = -4$. În plus limitele funcției f la $-\infty$ și la $+\infty$ sînt ambele $+\infty$. Cu aceste date alcătuim următorul tabel:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-132	3	-4	$+\infty$

Rezultă de aici că ecuația $f(x) = 0$ are toate rădăcinile reale și în plus

$$x_1 < -2 < x_2 < 1 < x_3 < 2 < x_4.$$

Deoarece $f(-1) = -85$ rezultă $-1 < x_2 < 1$. Analog din $f(3) = 43$ deducem: $x_4 < 3$.

În concluzie ecuația din enunț are patru rădăcini reale diferite ($x_1 < x_2 < x_3 < x_4$), dintre care trei (x_2, x_3, x_4) aparțin intervalului $[-1 ; 3]$.

4) *Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației* $3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x + m = 0$, $m \in \mathbf{R}$, *din intervalul* $[-1 ; 3]$. *Discuție.*

Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x + m$, derivabilă pe $\mathbf{R}$. Procedînd ca în cazul anterior obținem zerourile derivatei funcției: -2; 1; 2 și $f(-2) = m - 112$, $f(1) = m + 23$, $f(2) = m + 16$. În plus $f(-1) = m - 65$, $f(3) = m + 63$. Putem astfel alcătui tabelul următor:

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$m - 112$	$m - 65$	$m + 23$	$m + 16$	$m + 63$	$+\infty$

Deoarece răspunsul, în funcție de valorile parametrului real m, se poate da de aici cu oarecare dificultate, alcătuim tabelul numărul 5, după care putem afirma :

$m < -63$ — ecuația nu are rădăcini în $[-1 ; 3]$;

$m = -63$ — ecuația are o singură rădăcină $x_1 = 3$ în $[-1 ; 3]$;

$-63 < m < -23$ — ecuația are o singură rădăcină x_1 în $[-1 ; 3]$. Avem $2 < x_1 < 3$;

$m = -23$ — ecuația are trei rădăcini în $[-1 ; 3]$. Avem $x_1 = x_2 = 1$; $2 < x_3 < 3$;

$-23 < m < -16$ — ecuația are trei rădăcini în $[-1 ; 3]$. Avem $x_1 < 1 < x_2 < 2 < x_3 < 3$;

$m = -16$ — ecuația are trei rădăcini în $[-1 ; 3]$. Avem $x_1 < 1$; $x_2 = x_3 = 2$;

$-16 < m < 65$ — ecuația are o singură rădăcină în $[-1 ; 3]$. Avem $x_1 < 1$;

$m = 65$ — ecuația are două rădăcini în $[-1 ; 3]$. Avem $x_2 = x_3 = -1$

$m > 65$ — ecuația nu are rădăcini în $[-1 ; 3]$.

m \ x	$-\infty$	-2	-1	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$m-112$	$m-65$	$m+23$	$m+16$	$m+63$	$+\infty$
$-\infty$							
	+	−	−	−	−	−	+
-63	+	−	−	−	−	0	+
	+	−	−	−	−	+	+
-23	+	−	−	0	−	+	+
	+	−	−	+	−	+	+
-16	+	−	−	+	0	+	+
	+	−	−	+	+	+	+
65	+	−	0	+	+	+	+
	+	−	+	+	+	+	+
112	+	0	+	+	+	+	+
	+	+	+	+	+	+	+
$+\infty$							

TABELUL NR. 5

5) *Fie funcția* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3(m-1)x^2 - 12mx + 8m$, $m \in \mathbb{R}$. *Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației* $f(x) = 0$. *Discuție.*

Procedînd ca și în exemplul precedent putem scrie $f'(x) = 3x^2 + 6(m-1)x - 12m$, $x \in \mathbb{R}$ și deducem $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2m ; 2\}$.

În plus $f(-2m) = 4m(m + 1)(m + 2)$; $f(2) = -4(m + 1)$. Variația semnelor în funcție de valorile parametrului m, pentru $f(-2m)$ și $f(2)$ este prezentată în următorul tabel :

m	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f(-2m)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(2)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	

În fine, notînd $-2m = \alpha$, $2 = \beta$, și deoarece $\beta - \alpha = 2(m + 1)$ rezultă :

$$m < -1 \Rightarrow \beta < \alpha ;$$

$$m = -1 \Rightarrow \beta = \alpha ;$$

$$m > -1 \Rightarrow \alpha < \beta .$$

Rezultă că vor trebui analizate în parte fiecare din cazurile $m < -1$, $m = -1$ și $m > -1$. Pentru cazurile $m < -1$ și $m > -1$ alcătuim următoarele tabele :

Cazul $m < -1$

m \ x	$-\infty$	2	$-2m$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$f(2)$	$f(-2m)$	$+$
$-\infty$				
	$-$	$+$	$-$	$+$
-2	$-$	$+$	0	$+$
	$-$	$+$	$+$	$+$
-1				

Cazul $m > -1$

m \ x	$-\infty$	$-2m$	2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$f(-2m)$	$f(2)$	$+$
-1				
	$-$	$-$	$-$	$+$
0	$-$	0	$-$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$
$+\infty$				

Pentru $m = -1$ se deduce $f(x) = x^3 - 6x^2 = 12x - 8$, de unde $f'(x) = 3(x - 2)^2$. Rezultă :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

Răspunsul la problema propusă este deci :

$m < -2$ — ecuația are trei rădăcini reale ($x_1 < 2 < x_2 < -2m < x_3$) ;

$m = -2$ — ecuația are trei rădăcini reale ($x_1 < 2$, $x_2 = x_3 = 4$) ;

$-2 < m < -1$ — ecuația are o singură rădăcină reală ($x_1 < 2$) și două rădăcini complexe conjugate ;

$m = -1$	— ecuaţia are trei rădăcini reale egale ($x_1 = x_2 = x_3 = 2$);
$-1 < m < 0$	— ecuaţia are o singură rădăcină reală ($x_1 > 2$) şi două rădăcini complexe conjugate;
$m = 0$	— ecuaţia are trei rădăcini reale ($x_1 = x_2 = 0$; $x_3 > 2$);
$m > 0$	— ecuaţia are trei rădăcini reale ($x_1 < -2m < x_2 < 2 < x_3$).

6) *Să se determine, în funcţie de valorile parametrului real m, numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei*

$$x^3 + (m-2)x^2 + 2(m-2)x + m = 0.$$

Vom prezenta o rezolvare a problemei utilizînd „metoda grafică". Pentru aceasta să observăm că ecuaţia din enunţ este echivalentă cu $x^3 - 2x^2 - 4x = -m(x+1)^2$ şi deoarece $x \neq -1$, putem scrie:

$$\frac{-x^3 + 2x^2 + 4x}{(x+1)^2} = m. \tag{28}$$

Considerînd funcţiile definite prin:

$$y = \frac{-x^3 + 2x^2 + 4x}{(x+1)^2}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\} \tag{28'}$$

şi

$$y = m, \quad x \in \mathbf{R} \tag{28''}$$

este evident că soluţiile ecuaţiei (28) sînt abscisele punctelor de intersecţie ale graficelor celor două funcţii.

Pentru graficul funcţiei (28') deducem:

$$y' = -\frac{(x^2-1)(x+2)^2}{(x+1)^4},$$

ceea ce permite să întocmim următorul tabel de variaţie:

x	$-\infty$		-2		$1-\sqrt{5}$		-1		0		1		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$		$-$	‖	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y	$+\infty$	↘	8	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$\frac{5}{4}$	↘	0	↘	$-\infty$

Obţinem astfel graficul funcţiei (28'), care este prezentat în figura numărul 1.

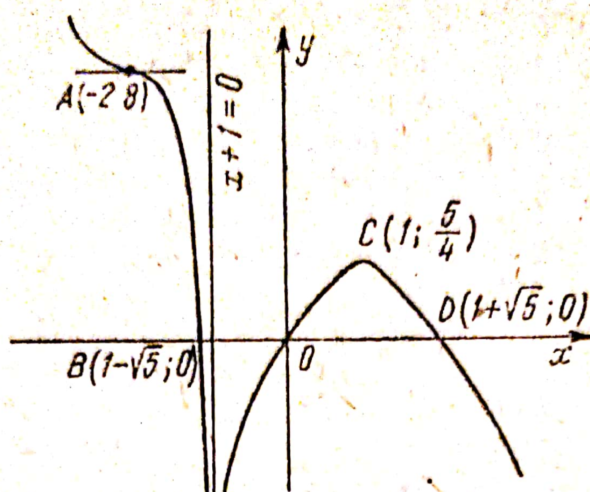


Fig. nr. 1.

Graficul funcţiei (28″) este o dreaptă paralelă cu axa absciselor, trecînd prin punctul variabil (0 ; m) al axei ordonatelor. În funcţie de valorile parametrului real m, această dreaptă intersectează graficul (28′) în puncte ale căror abscise sînt rădăcinile ecuaţiei din enunţ. Deducem :

$m < \frac{5}{4}$ — ecuaţia are trei rădăcini reale : $-2 < x_1 < -1 < x_2 < 1 < x_3$;

$m = \frac{5}{4}$ — ecuaţia are trei rădăcini reale : $-2 < x_1 < -1$; $x_2 = x_3 = 1$;

$\frac{5}{4} < m < 8$ — ecuaţia are o singură rădăcină reală $-2 < x_1 < -1$ şi două rădăcini complexe conjugate ;

$m = 8$ — ecuaţia are trei rădăcini reale $x_1 = x_2 = x_3 = -2$ (deoarece în acest caz dreapta $y = m$ este tangentă graficului (28′); $x = -2$ este rădăcină multiplă şi cum o ecuaţie algebrică de gradul trei, cu coeficienţi reali, nu poate avea numai două rădăcini reale, rezultă că $x = -2$ este rădăcină triplă) ;

$m > 8$ — ecuaţia are o singură rădăcină reală $x_1 < -2$ şi două rădăcini complexe conjugate.

Observaţii : 1°. În general pentru stabilirea numărului rădăcinilor reale ale unei ecuaţii algebrice prin metoda grafică, nu se obţin informaţii suplimentare dacă pentru executarea graficelor se indică cu fidelitate concavitatea şi asimptotele oblice sau orizontale.

2°. Pentru executarea graficului funcţiei (28′) am determinat şi punctele de intersecţie ale acestuia cu axa absciselor. Aceasta ne permite să dăm detalii suplimentare în legătură cu rădăcinile reale ale ecuaţiei

algebrice în discuţie. Spre exemplu pentru $m < 0$ deducem că cele trei rădăcini reale ale ecuaţiei sînt situate astfel: $1 - \sqrt{5} < x_1 < -1 < x_2 < 0$, $x_3 > 1 + \sqrt{5}$. Analog putem preciza şi pentru $m \geq 0$. În general însă pentru determinarea intersecţiei graficului unei funcţii de tipul (28) cu axa absciselor se întîmpină dificultăţi legate de rezolvarea unor ecuaţii de grad mai mare decît doi, motiv pentru care în răspunsul la problema rezolvată nu am făcut precizări privind situarea rădăcinilor faţă de numerele $1 - \sqrt{5}$, 0 şi $1 + \sqrt{5}$.

4.4. DIFERITE APLICAŢII

Exemple: 1) *Să se rezolve ecuaţia:*

$$(m + 1)x^4 + (m + p - 1)x^3 + (m - p + 2)x^2 + (m + p - 1)x + (1 - p) = 0;\ m, p \in \mathbf{R},$$

ştiind că admite rădăcini independente de m şi p.

Dacă x_0 este o rădăcină a ecuaţiei, care nu depinde de m şi p, putem scrie:

$$(m + 1)x_0^4 + (m + p - 1)x_0^3 + (m - p + 2)x_0^2 + (m + p - 1)x_0 + (1 - p) = 0,$$

oricare ar fi numerele reale m şi p. Deci

$$m(x_0^4 + x_0^3 + x_0^2 + x_0) + p(x_0^3 - x_0^2 + x_0 - 1) + (x_0^4 - x_0^3 + 2x_0^2 - x_0 + 1) = 0, \quad (29)$$

pentru oricare m şi p numere reale. Rezultă:

$$x_0^4 + x_0^3 + x_0^2 + x_0 = 0;\ x_0^3 - x_0^2 + x_0 - 1 = 0;\ x_0^4 - x_0^3 + 2x_0^2 - x_0 + 1 = 0,$$

sau

$$x_0(x_0 + 1)(x_0^2 + 1) = 0;\ (x_0 - 1)(x_0^2 + 1) = 0;\ (x_0^2 + 1)(x_0^2 - x_0 + 1) = 0.$$

Deducem de aici $x_0^2 + 1 = 0$, deci ecuaţia admite două rădăcini, i şi $-i$, independente de m şi p.

În continuare vom observa din (29) că ecuaţia se mai scrie sub forma:

$$(x^2 + 1)[m(x^2 + x) + p(x - 1) + (x^2 - x + 1)] = 0.$$

Rezultă că celelalte două rădăcini ale ecuaţiei din enunţ sînt în acelaşi timp şi rădăcinile ecuaţiei:

$$(m + 1)x^2 + (m + p - 1)x + (1 - p) = 0. \quad (29')$$

Facem observația că pentru $m = -1$ și $p \neq 2$ ecuația propusă admite rădăcinile i și $-i$ independente de p și rădăcina ecuației (29'), care în acest caz este de gradul unu. Dacă $m = -1$ și $p = 2$ se obțin numai rădăcinile i și $-i$.

2) *Să se rezolve ecuația* $x^3 - x^2 + (a + 1)x + b = 0$; $a, b \in \mathbb{R}$, *știind că admite rădăcinile:*

$$x_1 = \cos u\,;\ x_2 = \cos 2u\,;\ x_3 = -\cos 3u,$$

unde $0 < u < \frac{\pi}{2}$. *Să se determine parametrii* a *și* b.

Deoarece $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, deducem $\cos u + \cos 2u - \cos 3u = 1$
Putem scrie:

$$\cos u + \cos 2u - \cos 3u = 1 \Leftrightarrow (\cos u - \cos 3u) - (1 - \cos 2u) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 2u \sin u - 2 \sin^2 u = 0 \Leftrightarrow \sin u(\sin 2u - \sin u) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin u \sin\frac{u}{2} \cos\frac{3u}{2} = 0.$$

Deoarece $\sin u = 0$ și $\sin\frac{u}{2} = 0$ implică fiecare $u \notin \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ rezultă cu necesitate $\cos\frac{3u}{2} = 0$, deci $u = \frac{\pi}{3}(2k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Datorită condiției $0 < u < \frac{\pi}{2}$, deducem $k = 0$ și $u = \frac{\pi}{3}$. Se obțin rădăcinile ecuației:

$$x_1 = \frac{1}{2}\,;\ x_2 = -\frac{1}{2}\,;\ x_3 = 1.$$

În fine, utilizînd relația $x_1x_2x_3 = -b$, obținem $b = \frac{1}{4}$ și înlocuind $x = 1$, $b = \frac{1}{4}$ în ecuația din enunț avem $a + 1 + \frac{1}{4} = 0$, deci $a = -\frac{5}{4}$.

3) *Să se rezolve ecuația:*

$$\frac{\log_2 \frac{6x + 22}{5} - 1}{1 - \log_2 \frac{8 - x}{5}} = 2.$$

Datorită enunțului deducem:

$$6x + 22 > 0\,;\ 8 - x > 0\,;\ \frac{8 - x}{5} \neq 2,$$

de unde rezultă $x \in \left(-\frac{11}{3}; -2\right) \cup (-2; 8)$. În aceste condiții putem scrie:

$$\frac{\log_2 \frac{6x+22}{5} - 1}{1 - \log_2 \frac{8-x}{5}} = 2 \Leftrightarrow \frac{\log_2 (6x+22) - \log_2 10}{\log_2 10 - \log_2 (8-x)} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (6x+22)(x-8)^2 = \log_2 10^3 \Leftrightarrow (3x+11)(x-8)^2 = 500 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 - 37x^2 + 16x + 204 = 0. \quad (30)$$

Fie $f(x) = 3x^3 - 37x^2 + 16x + 204$. Încercînd să aflăm rădăcinile întregi ale ecuației $f(x) = 0$ (dacă acestea există), în afara condițiilor problemei, găsim:

$$f(1) \neq 0; \ f(-1) \neq 0; \ f(2) \neq 0; \ f(-2) = 0.$$

Deci ecuația (30) admite rădăcina întreagă $x_1 = -2$. Deducem în plus:

$$f(x) = (x+2)(3x^2 - 43x + 102),$$

de unde rezultă și rădăcinile $x_2 = 3$; $x_3 = \frac{34}{3}$.

Avînd în vedere condițiile de rezolvare rezultă că ecuația din enunț are o singură soluție $x_2 = 3$.

4) *Fie funcțiile* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + m; \ g(x) = x^3 - 4x^2 - mx + 4, \ m \in \mathbb{R}.$$

a) *Să se determine valorile parametrului m astfel încît ecuația $f(x) = 0$ să admită rădăcini multiple.*

b) *Să se determine valorile parametrului m pentru care ecuațiile $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ admit rădăcini comune.*

Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$. Deoarece rădăcinile multiple ale ecuației $f(x) = 0$ sînt și rădăcini ale ecuației $f'(x) = 0$, rezultă că poate fi rădăcină multiplă oricare dintre numerele 1; $-\frac{1}{3}$.

Avem:

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 - 1 + m = 0 \Leftrightarrow m = 1;$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{27}.$$

Deci pentru $m = 1$ ecuația admite rădăcinile $x_1 = x_2 = 1$ (Se găsește imediat și $x_3 = -1$), iar pentru $m = -\frac{5}{27}$ ecuația admite rădăcinile $x_1 = x_2 = -\frac{1}{3}$ $\left(\text{se obține } x_3 = \frac{5}{3}\right)$. Astfel am rezolvat primul punct al problemei.

Pentru a rezolva cel de al doilea punct al problemei vom determina soluțiile $(m ; x)$ ale sistemului:

$$\begin{aligned} &x^3 - x^2 - x + m = 0, \\ &x^3 - 4x^2 - mx + 4 = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Prin eliminarea lui m între cele două ecuații ale sistemului obținem ecuația bipătrată $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ ale cărei soluții sînt -2; -1; 1; 2.

Din prima ecuație a sistemului (31) deducem $m = x + x^2 - x^3$ și înlocuind pe rînd valorile obținute pentru x, putem scrie soluțiile sistemului:

$$(10 ; -2) ; (1 ; -1) ; (1 ; 1) ; (-2 ; 2)$$

Rezultă:

— pentru $m = -2$ ecuațiile au o singură rădăcină comună $x_1 = 2$;

— pentru $m = 1$ ecuațiile au două rădăcini comune $x_1 = -1$; $x_2 = 1$;

— pentru $m = 10$ ecuațiile au o singură rădăcină comună $x_1 = -2$.

5) *Fie m și n numere reale diferite astfel încît $mn > 0$ și funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = x^3 - (m + n)x^2 - (m^2 + mn + n^2)x + (m + n)(m^2 + n^2).$$

Să se calculeze $f(-m - n)$, $f(m + n)$ și să se demonstreze că ecuația $f(x) = 0$ are toate rădăcinile reale.

Deducem:

$$f(-m - n) = -(m + n)^3 - (m + n)^3 + (m^2 + mn + n^2)(m + n) +$$
$$+ (m + n)(m^2 + n^2) = (m + n)(-2m^2 - 4mn - 2n^2 + 2m^2 + mn +$$
$$+ 2n^2) = -3mn(m + n).$$

$$f(m + n) = (m + n)^3 - (m + n)^3 - (m^2 + mn + n^2)(m + n) +$$
$$+ (m + n)(m^2 + n^2) = -mn(m + n).$$

Deoarece $mn > 0$, rezultă $m + n \neq 0$, deci $f(-m - n) \neq 0$ și $f(m + n) \neq 0$. Prin urmare va trebui să analizăm separat cazurile $m + n > 0$ și $m + n < 0$.

Presupunînd $m + n > 0$ deducem :

$$-(m+n) < 0 < m+n$$

și

$$f(-m-n) = -3mn(m+n) < 0 ; \; f(0) = (m+n)(m^2+n^2) > 0 ;$$
$$f(m+n) = -mn(m+n) < 0,$$

deci ecuația $f(x) = 0$ admite rădăcinile reale x_1, x_2 astfel încît $-(m + n) < x_1 < 0 < x_2 < m + n$, de unde deducem că și cea de a treia rădăcină a ecuației $f(x) = 0$ este număr real. Dacă presupunem $m + n < 0$, deducem $m + n < 0 < -(m + n)$ și raționamentul este analog.

6) *Dacă ecuația* $x^3 + px + q = 0$; $p, q \in R$, *are o singură rădăcină reală, modulul unei rădăcini imaginare este mai mare sau mai mic decît modulul rădăcinii reale, după cum* $p > 0$, *respectiv* $p < 0$. (A. G. Ioachimescu — G.M. 8/1908).

Fie $x_1 = a$ rădăcina reală a ecuației. Rezultă :

$$x^3 + px + q = (x-a)(x^2 + ax + a^2 + p).$$

Presupunînd $p \neq 0$, rezultă că rădăcinile complexe ale ecuației sînt :

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(-a - i\sqrt{3a^2+4p}\right); \; x_3 = \frac{1}{2}\left(-a + i\sqrt{3a^2+4p}\right).$$

Deducem de aici :

$$|x_2| = |x_3| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2+4p}{4}} = \sqrt{a^2+p}.$$

Deci :

$$p > 0 \Rightarrow |x_2| = |x_3| > |a| ;$$
$$p < 0 \Rightarrow |x_2| = |x_3| < |a|.$$

Facem observația că pentru rezolvarea problemei s-a presupus $3a^2 + 4p > 0$.

7) *Fie ecuația cu coeficienți reali* $x^3 + px^2 + qx + r = 0$. *Dacă* $p \neq 0$ *și* $q^2 - 4pr < 0$, *rădăcinile reale ale ecuației au același semn, opus semnului lui* p.

Pentru rezolvare vom observa că putem scrie :

$$x^3 + px^2 + qx + r = x^3 + p\left[\left(x + \frac{q}{2p}\right)^2 + \frac{4pr - q^2}{4p^2}\right].$$

Dacă x_0 este o rădăcină reală a ecuației din enunț se verifică inegalitatea :

$$\left(x_0 + \frac{q}{2p}\right)^2 + \frac{4pr - q^2}{4p^2} > 0$$

și deoarece

$$x_0^3 + p\left[\left(x_0 + \frac{q}{2p}\right)^2 + \frac{4pr - q^2}{4p^2}\right] = 0,$$

rezultă că x_0^3 și p au semne contrarii, deci x_0 și p au semne contrarii.

8) a) *Fie polinomul* $p \in \mathbf{C}[X]$, *diferit de polinomul zero. Dacă există numărul complex* $c \neq 0$ *astfel încît* $p(x) = p(x + c)$ *oricare ar fi* $x \in \mathbf{C}$, *gradul polinomului* p *este egal cu zero.*

b) *Dacă* $p \in \mathbf{C}[X]$ *este diferit de polinomul zero, iar* a *și* b *sînt numere complexe,* $b \neq 0$, *să se rezolve ecuația* $p(x) = 0$ *știind că :*

$$(x - a)[p(x) - p(x - b)] = 3bp(x), \ \forall x \ [x \in \mathbf{C}].$$

Pentru a răspunde la prima întrebare să observăm că dacă grad $p = 0$, avem $p(x) = p(x + c)$ oricare ar fi $x \in \mathbf{C}$.

Dacă grad $p > 0$, fie x_1 o rădăcină a polinomului p, deci $p(x_1) = 0$. Cum $p(x_1) = p(x_1 + c)$, deducem că $x_1 + c$ este de asemenea o rădăcină a polinomului p. Reluînd raționamentul, cum $x_2 = x_1 + c$ este o rădăcină a polinomului p, deducem că $x_2 + c = x_1 + 2c$ este rădăcină a polinomului p. Presupunînd acum că $x_1 + hc$, $h \in \mathbf{N}$, $h \geqslant 1$, este o rădăcină a polinomului p, datorită ipotezei avem :

$$0 = p(x_1 + hc) = p(x_1 + (h + 1)c),$$

deci și $x_1 + (h + 1)c$ este o rădăcină a polinomului p.

Rezultă că oricare ar fi rădăcina x_1 a polinomului p, sînt rădăcini ale polinomului p și numerele complexe :

$$x_1 + c \, ; \ x_1 + 2c \, ; \ \ldots ; \ x_1 + nc \, ; \ \ldots ,$$

evident imposibil, deoarece numărul rădăcinilor unui polinom nu poate depăși gradul polinomului (care este finit). Deci presupunerea grad $p > 0$ este falsă. Rezultă că singurele polinoame nenule, care verifică relația din enunț, sînt polinoamele de gradul zero.

Pentru rezolvarea celui de al doilea punct al problemei vom scrie relația din enunț sub forma :

$$(x - a - 3b)p(x) = (x - a)p(x - b) \ \forall x \ [x \in \mathbf{C}]. \qquad (32)$$

Înlocuind $x = a$, deducem $-3bp(a) = 0$, deci există polinomul $p_1 \in \mathbb{C}[X]$ astfel încît $p = (X - a)p_1$. Înlocuind în (32), deducem:

$$(x - a - 3b)(x - a)p_1(x) = (x - a)(x - a - b)p_1(x - b), \quad \forall x\ [x \in \mathbb{C}],$$

sau

$$(x - a - 3b)p_1(x) = (x - a - b)p_1(x - b), \quad \forall x\ [x \in \mathbb{C}]. \qquad (32')$$

Punînd $x = a + b$ în (32') rezultă $-2bp_1(a + b) = 0$, deci există polinomul $p_2 \in \mathbb{C}[X]$ astfel încît $p_1 = (X - a - b)p_2$. Înlocuind în (32') rezultă:

$$(x - a - 3b)(x - a - b)p_2(x) = (x - a - b)(x - a - 2b)p_2(x - b),$$
$$\forall x\ [x \in \mathbb{C}].$$

deci

$$(x - a - 3b)p_2(x) = (x - a - 2b)p_2(x - b), \quad \forall x\ [x \in \mathbb{C}]. \qquad (32'')$$

În fine, înlocuind $x = a + 2b$ în (32'') obținem $-bp_2(a + 2b) = 0$, de unde deducem existența polinomului $p_3 \in \mathbb{C}[X]$ astfel încît $p_2 = (X - a - 2b)p_3$. Înlocuind în (32'') putem scrie:

$$(x - a - 3b)(x - a - 2b)p_3(x) = (x - a - 2b)(x - a - 3b)p_3(x - b),$$
$$\forall x\ [x \in \mathbb{C}],$$

sau

$$p_3(x) = p_3(x - b), \quad \forall x\ [x \in \mathbb{C}].$$

Avînd în vedere primul punct al problemei rezultă $p_3 = k \in \mathbb{C}^*$. Putem acum scrie:

$$p = (X - a)p_1 = (X - a)(X - a - b)p_2 = (X - a)(X - a -$$
$$- b)(X - a - 2b)k,$$

de unde rezultă că rădăcinile ecuației $p(x) = 0$ sînt $x_1 = a$, $x_2 = a + b$, $x_3 = a + 2b$. (Facem observația că în cazul particular $a = 3$; $b = -1$ punctul b) al problemei a fost propus la concursul pentru admiterea în învățămîntul superior din iulie 1981.)

9) *Fie polinomul* $p \in \mathbb{Z}[X]$.

a) *Dacă* p *admite cel puțin o rădăcină întreagă și* m, n *sînt două numere întregi,* $n > 1$, *cel puțin unul dintre numerele:*

$$p(m)\ ;\ p(m + 1)\ ;\ \ldots ;\ p(m + n - 1), \qquad (33)$$

este divizibil prin n.

b) *Să se demonstreze că polinomul* p *nu admite rădăcini întregi în fiecare din ipotezele:*

(i) $p(0)$ *și* $p(1)$ *sînt numere impare;*

(ii) *nici unul dintre numerele* $p(-4)$; $p(0)$; $p(4)$ *nu este divizibil prin* 3.

a) Dacă polinomul p admite o rădăcină $a \in \mathbf{Z}$, există $q \in \mathbf{Z}[X]$ astfel încît $p = (X - a)q$. În acest caz succesiunea de numere (33) este:

$$(m - a)q(m) ; (m - a + 1)q(m + 1) ; \ldots ; (m - a + n - 1)q(m + n - 1). \qquad (33')$$

Deoarece $m - a$; $m - a + 1$; ...; $m - a + n - 1$ sînt n numere întregi consecutive, unul dintre acestea este divizibil prin n, deci cel puțin unul din numerele succesiunii (33′) este divizibil prin n.

b) Presupunînd că polinomul p admite cel puțin o rădăcină întreagă a și considerînd $m = 0$, $n = 2$, rezultă că cel puțin unul dintre numerele $p(0)$ și $p(1)$ este divizibil prin 2, contrar ipotezei (i). Deci $p(a) \neq 0$, oricare ar fi $a \in \mathbf{Z}$.

În ipoteza (ii), presupunînd, de asemenea, că polinomul p admite o rădăcină întreagă a și considerînd $m = 0$, $n = 3$, deducem că unul din numerele $-a$, $1 - a$, $2 - a$ este divizibil prin 3. Pe de altă parte putem scrie:

$$p(-4) = (-4 - a)q(-4) = -6q(-4) + (2 - a)q(-4) ;$$

$$p(0) = -aq(0) ;$$

$$p(4) = (4 - a)q(4) = 3q(4) + (1 - a)q(4) ;$$

Deducem astfel că cel puțin unul dintre numerele $p(-4)$, $p(0)$, $p(4)$ este divizibil prin 3, contrar ipotezei. Rezultă și în acest caz $p(a) \neq 0$ oricare ar fi $a \in \mathbf{Z}$.

10) *Să se determine numerele complexe p, q, r știind că:*

$$G = \{x \mid x \in \mathbf{C},\ x^3 + px^2 + qx + r = 0\},$$

este grup multiplicativ, abelian.

Vom începe rezolvarea problemei observînd că din enunț rezultă că grupul G poate avea: un singur element, două elemente, sau trei elemente, corespunzător situațiilor în care ecuația $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ are o rădăcină triplă, o rădăcină dublă și una simplă, respectiv trei rădăcini simple.

Fie $x_1 = 1$ elementul unitate al grupului. Dacă $x_2x_3 = x_2$, deci $x_3 = 1$ (nu putem avea $x_2 = 0$, deoarece nu există x_2^{-1}), putem avea: $x_2^2 = x_3$, deci $x_2 = 1$; sau $x_2^2 = 1$, deci $x_2 \in \{-1 ; 1\}$. Deci avem sau $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ sau $x_1 = x_3 = 1$, $x_2 = -1$, cărora le corespund:

$$G = \{1\}, \text{ respectiv } G = \{1 ; -1\}.$$

În primul caz $p = -3$, $q = 3$, $r = -1$, în al doilea caz $p = q = -1$, $r = 1$. Evident răspunsul este același dacă presupunem $x_2x_3 = x_3$.

În fine putem avea și $x_2 x_3 = 1$. Rezultă $x_1 x_2 x_3 = 1$, deci $r = -1$. Înlocuind $x = 1$ în ecuație deducem $p + q = 0$, de unde $q = -p$. Ecuația se scrie în acest caz

$$(x - 1)[x^2 + (p + 1)x + 1] = 0.$$

Dacă $x_2^2 = 1$ rezultă $x_2 \in \{-1 ; 1\}$ și înlocuind în ecuația $x^2 + (p + 1)x + 1 = 0$, obținem $p = -3$, respectiv $p = 1$. Deducem în primul caz $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, rezultat semnalat anterior, iar în al doilea caz $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = -1$, deci $G = \{-1 ; 1\}$ și $p = 1$, $q = -1$; $r = -1$.

Dacă $x_2^2 = x_3$, cum $x_2 x_3 = 1$, eliminînd x_3 între cele două relații obținem $x_2^3 = 1$. Excluzînd cazul $x_2 = 1$ (studiat anterior) deducem $x_2^2 + x_2 + 1 = 0$. Din $x_2^2 + x_2 + 1 = 0$ și $x_2^2 = x_3$ rezultă $x_2 + x_3 = -1$ deci $p + 1 = 1$, de unde $p = 0$. În acest caz ecuația din enunț este $x^3 - 1 = 0$ (deci $p = q = 0$, $r = -1$) și

$$G = \{1 ; \varepsilon ; \bar{\varepsilon}\},$$

ε fiind una din rădăcinile cubice complexe ale unității.

§ 5. ECUAȚII IRAȚIONALE

În prezentarea acestui capitol trebuie să subliniem cadrul destul de restrîns în care, problema rezolvării ecuațiilor iraționale este abordată în liceu. În limitele acestui cadru vom prezenta situațiile în care ecuațiile conțin radicali de ordinul 2, radicali de ordinul 3 și mai mare decît 3.

Pentru ecuațiile iraționale care conțin numai radicali de ordinul doi există și tendințe de tipizare a rezolvărilor, ca spre exemplu :

1°. se stabilesc condițiile de existență a radicalilor ;

2°. se fac treceri convenabile, dintr-o parte în alta a ecuației pentru ridicarea la pătrat ;

3°. se stabilesc condițiile în care se ridică la pătrat ;

4°. se află rădăcinile ecuației rezolvente ;

5°. se află rădăcinile ecuației iraționale propuse.

Pentru exemplificare să considerăm ecuația :

$$\sqrt{6 + x - x^2} = 4 - x, \ x \in \mathbf{R}.$$

Condițiile de existență a radicalului sînt :

$$6 + x - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-2 ; 3].$$

În plus pentru $4 - x \leqslant 0$, deci pentru $x \geqslant 4$, ecuația nu este verificată. Deoarece :

$$[-2\,;\,3] \cap (-\infty\,;\,4) = [-2\,;\,3],$$

rezultă că pentru $x \in [-2\,;\,3]$, putem scrie :

$$\sqrt{6 + x - x^2} = 4 - x \Leftrightarrow 6 + x - x^2 = 16 - 8x + x^2 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 9x + 10 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{2\,;\,\frac{5}{2}\right\}.$$

Din

$$[-2\,;\,3] \cap \left\{2\,;\,\frac{5}{2}\right\} = \left\{2\,;\,\frac{5}{2}\right\},$$

deducem soluțiile ecuației : $x_1 = 2$; $x_2 = \dfrac{5}{2}$.

Pentru economisirea timpului de lucru, propunem eliminarea anumitor etape. Fie spre exemplu ecuația :

$$\sqrt{x + 15} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{6 - 2x},\ x \in \mathbf{R}.$$

În condițiile de existență a radicalilor, putem scrie :

$$\sqrt{x + 15} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{6 - 2x} \Leftrightarrow (\sqrt{x + 15} + \sqrt{x + 3})^2 =$$

$$= (\sqrt{6 - 2x})^2 \Leftrightarrow \sqrt{(x + 15)(x + 3)} = -6 - 2x \Rightarrow (x + 15)(x + 3) =$$

$$= (6 + 2x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3\,;\,1\}.$$

Deoarece din rezolvare deducem :

$$\sqrt{x + 15} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{6 - 2x} \Rightarrow x \in \{-3\,;\ 1\},$$

rezultă că mulțimea soluțiilor ecuației iraționale propuse este inclusă în mulțimea $\{-3\,;\,1\}$. Verificînd găsim soluția $x = -3$.

Adoptarea acestui mod de lucru nu exclude însă ca în anumite cazuri să se scrie explicit, de la început, condițiile de existență a radicalilor. Considerînd spre exemplu ecuația :

$$\sqrt{x - 1} + \sqrt{2 - x - x^2} = 2x^2 - x - 1,$$

încercările de eliminare a radicalilor conduc la o ecuație rezolventă de grad mai mare decît 4. Datorită condițiilor de existență a radicalilor, putem scrie :

$$\left.\begin{array}{l} x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1 \\ 2 - x - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-2\,;\,1] \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \{1\}.$$

Deci ecuația propusă poate admite soluția 1, sau nu admite soluții. Verificînd găsim soluția 1.

O altă problemă asupra căreia dorim să insistăm este în legătură cu gradul rezolventei ecuației iraționale propuse. În mod obligatoriu, va trebui ca, în operațiile de izolare a rădăcinilor și de ridicare la pătrat în ambele părți ale ecuației, să alegem căile cele mai simple.

Spre exemplu, propunînd spre rezolvare ecuația

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{x+4}+\sqrt{3x+2}-\sqrt{5-x}=0,\ x\in\mathbb{R}, \qquad (34)$$

va exista cu certitudine intenția să se opteze pentru următorul mod de lucru:

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+2}=\sqrt{x+4}+\sqrt{5-x}\Leftrightarrow 4x+5+$$
$$+2\sqrt{(x+3)(3x+2)}=9+2\sqrt{(x+4)(5-x)}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{(x+4)(5-x)}-\sqrt{(x+3)(3x+2)}=2x-2.$$

În această etapă vom constata că situația se complică suficient de mult, motiv pentru care trebuie să găsim o nouă cale de rezolvare. Un studiu atent al radicalilor din prima parte a ecuației conduce la descoperirea următorului mod de lucru:

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{x+4}=\sqrt{5-x}-\sqrt{3x+2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x+7-2\sqrt{(x+3)(x+4)}=2x+7-2\sqrt{(5-x)(3x+2)}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{(x+3)(x+4)}=\sqrt{(5-x)(3x+2)}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-3x+1=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{1}{2};\ 1\right\}.$$

Verificînd găsim soluția 1.

Tot în legătură cu ecuația rezolventă trebuie să evidențiem următoarele:

– În funcție de modul de lucru ales, o ecuație irațională poate conduce la ecuații rezolvente diferite, dar mulțimea soluțiilor fiecărei ecuații rezolvente include mulțimea soluțiilor ecuației iraționale ce se rezolvă.

– Mai multe ecuații iraționale pot conduce la aceeași ecuație rezolventă. Pentru a exemplifica, să asociem ecuației (34) următoarele ecuații:

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+2}+\sqrt{5-x}=0,\ x\in\mathbb{R} \qquad (34')$$
$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+2}-\sqrt{5-x}=0,\ x\in\mathbb{R}. \qquad (34'')$$
$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+2}+\sqrt{5-x}=0,\ x\in\mathbb{R}. \qquad (34''')$$

Procedînd pentru fiecare din aceste ecuaţii, în acelaşi mod ca şi în cazul ecuaţiei (34) sîntem conduşi la ecuaţia rezolventă $2x^2 - 3x + 1 = 0$. Deducem :

— ecuaţia (34′) are soluţia $\frac{1}{2}$;

— ecuaţia (34″) are soluţiile $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 1$;

— ecuaţia (34‴) nu are soluţii.

Deosebit de important pentru activitatea individuală este să nu fim tentaţi a lucra după anumite şabloane (probleme tipizate), ceea ce ar aduce prejudicii serioase pregătirii la matematică. În rezolvarea unei probleme este bine ca, şi atunci cînd întrevedem (sau cunoaştem) un mod de rezolvare, să alegem un mod de lucru care să aibă în vedere şi particularităţile enunţului. care de cele mai multe ori au ca efect reducerea volumului de muncă. Prezentăm în continuare cîteva exemple pe care le găsim edificatoare în acest sens.

Exemple : 1) *Să se rezolve ecuaţia :*

$$\sqrt{x^2 + 2x + 4} = 2x^2 + 4x + 2,\ x \in \mathbf{R}.$$

Observînd că putem scrie :

$$\sqrt{x^2 + 2x + 4} = 2(x^2 + 2x + 4) - 6,$$

notînd $\sqrt{x^2 + 2x + 4} = u > 0$, sîntem conduşi la ecuaţia $2u^2 - u - 6 = 0$, de unde deducem $u = 2$. Se obţin imediat soluţiile ecuaţiei propuse $x_1 = -2$; $x_2 = 0$.

2) *Ecuaţia :*

$$\sqrt{4x^2 - 12x + 9} + \sqrt{9x^2 - 12x + 4} = x^2 - 5x + 5,\quad x \in \mathbf{R}$$

este echivalentă cu :

$$|2x - 3| + |3x - 2| = x^2 - 5x + 5,\quad x \in \mathbf{R}.$$

3) *Să se rezolve ecuaţia :*

$$\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + x + 1} = 3,\ x \in \mathbf{R}.$$

Notînd $\sqrt{x^2 + x + 4} = A$, $\sqrt{x^2 + x + 1} = B$, obţinem $A + B = 3$ şi $A^2 - B^2 = 3$. Rezultă $A - B = 1$. Se deduce imediat $A = 2$, deci $x^2 + x = 0$. Soluţiile ecuaţiei sînt $x_1 = -1$; $x_2 = 0$.

4) *Să se rezolve ecuaţia :*

$$\sqrt{x^2 - 8x + 7} + \sqrt[4]{x^2 - 8x + 7} = 6.$$

Notînd $\sqrt[4]{x^2 - 8x + 7} = u \geqslant 0$, ecuația devine $u^2 + u - 6 = 0$, de unde rezultă $u = 2$. Deci $x^2 - 8x - 9 = 0$ și soluțiile ecuației propuse sînt $x_1 = -1$; $x_2 = 9$.

În încheiere prezentăm exemple de ecuații iraționale ce conțin radicali de ordin mai mare decît doi, cu scopul evidențierii unor procedee de rezolvare.

Exemple : 1) *Să se rezolve ecuația :*

$$\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{x-2},\ x \in \mathbf{R}. \qquad (35)$$

Se reamintește că radicalul de indice impar dintr-un număr real este definit oricare ar fi acest număr.

În plus dacă $a, b \in \mathbf{R}$, putem scrie :

$$a = b \Leftrightarrow a^{2k+1} = b^{2k+1},\ k \in \mathbf{Z}.$$

Rezultă de aici că ridicînd la puterea a treia în ambele părți ale ecuației, ecuația obținută este echivalentă cu ecuația inițială. Prin urmare soluțiile ecuației rezolvente sînt și soluțiile ecuației propuse.

Deci ecuația (35) este echivalentă cu ecuația

$$(\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{2x-3})^3 = (\sqrt[3]{x-2})^3. \qquad (35')$$

În fine dacă $E = A + B$, deducem $(A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B) = A^3 + B^3 + 3ABE$. Deci ecuația (35′) se scrie:

$$x - 2 + 3\sqrt[3]{1-x}\cdot\sqrt[3]{2x-3}\cdot\sqrt[6]{x-2} = x - 2,$$

sau

$$(1-x)(2x-3)(x-2) = 0.$$

Soluțiile ecuației (35) sînt deci $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{3}{2}$, $x_3 = 2$.

2) *Să se determine $x \in \mathbf{R}$ astfel încît :*

$$\sqrt[4]{x+18} - \sqrt[4]{x+2} = 2.$$

Notînd $\sqrt[4]{x+18} = a \geqslant 0$ și $\sqrt[4]{x+2} = b \geqslant 0$, deducem $a - b = 2$ și $a^4 - b^4 = 16$. Eliminînd a, între aceste două ecuații, rezultă $b(b^2 + 3b + 4) = 0$, deci $b = 0$. Rezultă că ecuația propusă are soluția unică -2.

3) *Să se rezolve ecuația :*

$$\sqrt{1-x} - \sqrt[3]{x-12} = 7,\ x \in \mathbf{R}.$$

Pentru rezolvare putem nota $\sqrt{1-x} = a \geqslant 0$, $\sqrt[3]{x-12} = b$. Procedînd ca în exemplul anterior, se obține sistemul:

$$a - b = 7\ ;\ a^2 + b^3 = 11 = 0$$

Eliminînd a, deducem ecuația $b^3 + b^2 + 14b + 60 = 0$, cu singura soluție reală $b_1 = -3$, deci $x = -15$, soluție care verifică ecuația irațională propusă, deoarece $a = b + 7 = 4 > 0$.

§ 6. SISTEME DE DOUĂ ECUAȚII ALGEBRICE CU DOUĂ NECUNOSCUTE

Prin exemplele pe care le prezentăm, intenționăm să asigurăm o succintă parcurgere a principalelor probleme de rezolvare a sistemelor de două ecuații cu două necunoscute. Evident prezentarea nu se pretinde a fi exhaustivă dată fiind, în primul rînd, existența unor limite în cadrul cărora rezolvarea sistemelor poate fi efectuată.

6.1. SISTEME DE DOUĂ ECUAȚII DE GRADUL ÎNTÎI CU DOUĂ NECUNOSCUTE

Facem observația că rezolvarea sistemelor din cele două exemple pe care le prezentăm va fi efectuată cu ajutorul regulii lui Cramer, dar poate fi înlocuită cu o rezolvare prin metode elementare (substituție sau reducere).

Exemple: 1) *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases}(2m+1)x + (1-3m)y = m+2,\\ (m-4)x + (m+16)y = 2(m+2),\end{cases} \quad m \in \mathbb{C}.$$

Utilizînd notațiile cunoscute, putem scrie:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2m+1 & 1-3m \\ m-4 & m+16 \end{vmatrix} = (2m+1)(m+16)+(m-4)(3m-1) = 5(m+2)^2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} m+2 & 1-3m \\ 2(m+2) & m+16 \end{vmatrix} = (m+2)(m+16-2+6m) = 7(m+2)^2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2m+1 & m+2 \\ m-4 & 2(m+2) \end{vmatrix} = (m+2)(4m+2-m+4) = 3(m+2)^2.$$

Deci pentru $m = -2$ sistemul este compatibil nedeterminat avînd soluţiile $\left(t\,;\ \frac{3}{7}\,t\right)$, t fiind arbitrar în C. (Se ştie că în cazurile în care sistemul este nedeterminat, cele două ecuaţii ale sistemului au aceleaşi soluţii, care sînt şi soluţiile sistemului. Înlocuind $m = -2$ în oricare din ecuaţiile sistemului, soluţiile ecuaţiei obţinute sînt soluţiile sistemului.)

Dacă $m \in C\setminus\{-2\}$ sistemul este compatibil determinat, avînd soluţia $\left(\frac{7}{5}\,;\ \frac{3}{5}\right)$.

2) *Fie sistemul :*

$$\begin{cases}(2-3m)x+(2m-1)y=12m+1,\\(4-5m)x+(3m-2)y=17m+2,\end{cases}\quad m\in R,\ (x\,;\,y)\in R^2.$$

1°. *Să se rezolve. Discuţie.*

2°. *Dacă $m \neq 0$, $m \neq 1$:*

a) *să se arate că $x \neq 2$ şi să se stabilească $a \in R$ astfel încît $y \neq a$;*
b) *să se găsească o relaţie independentă de m între x şi y ;*
c) *să se demonstreze inegalitatea :*

$$\frac{y^2-x^2}{7^2} \geqslant \frac{1}{4};$$

d) *să se determine $m \in Z$ ştiind că x şi y sînt cifra zecilor şi respectiv cifra unităţilor unui număr de două cifre, care se cere ;*

e) *să se rezolve ecuaţia :*

$$\frac{x+y-19}{m+4}=1.$$

1°. Aplicînd regula lui Cramer, deducem:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2-3m & 2m-1\\4-5m & 3m-2\end{vmatrix}=-(3m-2)^2+(2m-1)(5m-4)=m(m-1);$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}12m+1 & 2m-1\\17m+2 & 3m-2\end{vmatrix}=(12m+1)(3m-2)-(17m+2)(2m-1)=$$
$$=2m(m-4);$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2-3m & 12m+1\\4-5m & 17m+2\end{vmatrix}=(2-3m)(17m+2)+(5m-4)(12m+1)=$$
$$=3m(3m-5).$$

Rezultă :

— pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{0 ; 1\}$ sistemul este compatibil determinat, cu soluția :

$$\left(\frac{2(m-4)}{m-1} ; \quad \frac{3(3m-5)}{m-1}\right);$$

— pentru $m = 0$ sistemul este compatibil nedeterminat, avînd soluțiile :

$$(t ; 2t - 1), \ t \in \mathbb{R};$$

— pentru $m = 1$ sistemul este incompatibil.

2a) Dacă $x = 2$, deducem $\frac{2(m-4)}{m-1} = 2$, sau $2m - 8 = 2m - 2$, evident imposibil. Punînd acum $y = a$, putem scrie succesiv :

$$y = a \Leftrightarrow \frac{9m - 15}{m - 1} = a \Leftrightarrow m(a - 9) = a - 15,$$

egalitate care are sens numai pentru $a \neq 9$. Rezultă $y \neq 9$.

2b) În general pentru a stabili relația între x și y, independentă de parametrul m, se elimină m între cele două ecuații ale sistemului. Obținem același rezultat dacă observăm că ecuațiile :

$$x = \frac{2(m-4)}{m-1} ; \ y = \frac{3(3m-5)}{m-1},$$

se mai pot scrie :

$$x = 2 - \frac{6}{m-1} ; \ y = 9 - \frac{6}{m-1}, \qquad (36)$$

de unde se deduce imediat $y - x = 7$, adică relația cerută în enunț.

2c) Utilizînd (36) și relația $y - x = 7$, putem scrie :

$$\frac{y^3 - x^3}{7^3} \geqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{(y-x)(x^2 + xy + y^2)}{7^3} \geqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow (x - y)^2 + 3xy \geqslant \frac{7^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3xy \geqslant \frac{3 \cdot 7^2}{4} \Leftrightarrow \frac{6(m-4)(3m-5)}{(m-1)^2} \geqslant -\frac{49}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24[(m-1) - 3][3(m-1) - 2] \geqslant -49(m-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24[3(m-1)^2 - 11(m-1) + 6] \geqslant -49(m-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 121(m-1)^2 - 24 \cdot 11 \cdot (m-1) + 144 \geqslant 0 \Leftrightarrow [11(m-1) - 12]^2 \geqslant 0,$$

ceea ce demonstrează inegalitatea din enunț.

2d) Deoarece soluția sistemului se poate scrie și sub forma (36), în condițiile $m, x, y \in \mathbf{Z}$, deducem $m - 1 \in \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$. Datorită relațiilor $y = 9 - \frac{6}{m-1}$ și $y \leqslant 9$ rezultă $m - 1 > 0$. În fine, deoarece $x = 2 - \frac{6}{m-1} > 0$ rezultă și $m - 1 > 3$. Deci $m - 1 = 6$, de unde $m = 7$. Rezultă $x = 1$, $y = 8$, și numărul cerut este 18.

2e) Putem scrie:

$$\frac{x+y-19}{m+4} = 1 \Leftrightarrow \frac{2(m-4)+3(3m-5)-19(m-1)}{(m-1)(m+4)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-8m-4}{(m-1)(m+4)} = 1 \Leftrightarrow m(m+11) = 0.$$

Avînd în vedere condițiile enunțului, soluția ecuației este $m = -11$.

6.2. ELIMINAREA UNEI NECUNOSCUTE ÎNTRE DOUĂ ECUAȚII ALGEBRICE DE GRADUL DOI, CU DOUĂ NECUNOSCUTE

Fie sistemul:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0, \end{cases} \quad (37)$$

coeficienții ecuațiilor fiind numere complexe.

Dacă cel puțin unul dintre numerele a_1, a_2, c_1, c_2 este nul, rezolvarea sistemului este simțitor ușurată. Spre exemplu, presupunînd $a_1 = 0$, din prima ecuație se scoate x, care se substituie în ecuația a doua, obținîndu-se ecuația rezolventă în y, a sistemului, ecuație de grad cel mult patru.

Fie acum $a_1a_2c_1c_2 \neq 0$. Înmulțind parte cu parte prima ecuație cu c_2, și a doua ecuație cu $-c_1$, prin adunarea ecuațiilor obținute, rezultă o ecuație de forma:

$$Lx^2 + Mxy + Nx + Py + R = 0,$$

sau

$$(Mx + P)y = -(Lx^2 + Nx + R). \quad (37')$$

Excluzînd cazurile banale $M = 0$, $P \neq 0$ și $M = P = 0$, în care rezolvarea este imediată, mai deosebim cazurile:

1° $MX + P \mid LX^2 + NX + R$

2° $MX + P$ nu divide $LX^2 + NX + R$.

În cazul 1°, putem scrie $LX^2 + NX + R = (MX + P)(SX + T)$, deci ecuația (37′) devine:

$$(Mx + P)(y - Sx - T) = 0,$$

rezolvarea sistemului (37) reducîndu-se la rezolvarea a două sisteme, alcătuite din una din ecuațiile acestuia împreună cu ecuația $Mx + P = 0$ respectiv $y - Sx - T = 0$.

În cazul 2°, din (37′), rezultă:

$$y = -\frac{Lx^2 + Nx + R}{Mx + P}.$$

Substituind de aici, y în oricare din ecuațiile sistemului (37), deducem rezolventa în x a acestuia, care este o ecuație de grad cel mult patru.

Corespunzător cazurilor 1° și respectiv 2°, prezentăm în continuare două exemple numerice.

Exemple: 1)

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy - y^2 + x - 3y - 2 = 0, \\ 4x^2 + xy - y^2 + 2x - 2y - 4 = 0; \end{cases} \quad (x; y) \in \mathbf{C}^2.$$

Înmulțind prima ecuație, parte cu parte, cu -1 și adunînd cu cea de a doua ecuație a sistemului, deducem:

$$x^2 - xy + x + y - 2 = 0,$$

deci

$$(x - 1)y = x^2 + x - 2.$$

Deoarece $x - 1 \mid x^2 + x - 2$, scriem ultima ecuație sub forma:

$$(x - 1)(y - x - 2) = 0,$$

de unde deducem $x - 1 = 0$ sau $y - x - 2 = 0$.

Sîntem astfel conduși la rezolvarea sistemelor:

$$\begin{cases} x = 1, \\ 3x^2 + 2xy - y^2 + x - 3y - 2 = 0; \end{cases} \quad (38)$$

$$\begin{cases} y - x - 2 = 0, \\ 3x^2 + 2xy - y^2 + x - 3y - 2 = 0. \end{cases} \quad (38')$$

Soluțiile $(1; 1)$, $(1; -2)$ ale sistemului (38) se obțin imediat.

Pentru rezolvarea sistemului (38′) vom substitui $y = x + 2$, din prima ecuație, în ecuația a doua. Obținem ecuația $2x^2 - x - 6 = 0$

ale cărei soluții sînt 2 și $-\frac{3}{2}$. Se obțin de aici soluțiile (2 ; 4), $\left(-\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right)$ ale sistemului (38′).

Deci soluțiile sistemului din enunț sînt :

$$(1\ ;\ 1)\ ;\ (1\ ;\ -2)\ ;\ (2\ ;\ 4)\ ;\ \left(-\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right)$$

2)

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 - 4x - 5y + 3 = 0, \\ 3x^2 - xy + 3y^2 - 2x + 2y - 11 = 0, \end{cases} \quad (x\ ;\ y) \in \mathbf{C}^2.$$

Înmulțind, parte cu parte, prima ecuație 3, a doua ecuație cu -1 și adunînd ecuațiile obținute, rezultă $4xy - 9y^2 - 10x - 17y + 20 = 0$, de unde putem scrie :

$$x = \frac{9y^2 + 17y - 20}{4y - 10}. \tag{39}$$

Substituind în prima ecuație a sistemului (și efectuînd calculele) deducem :

$$17y^4 + 44y^3 + 3y^2 - 44y - 20 = 0,$$

ecuație ale cărei rădăcini sînt $y_1 = 1$; $y_2 = -1$; $y_3 = -2$, $y_4 = -\frac{10}{17}$.

Înlocuind succesiv valorile obținute pentru y în (39), rezultă :

$$x_1 = -1\ ;\ x_2 = 2\ ;\ x_3 = 1\ ;\ x_4 = \frac{37}{17}.$$

Rezultă că soluțiile sistemului sînt : $(-1\ ;\ 1)$; $(2\ ;\ -1)$; $(1\ ;\ -2)$; $\left(\frac{37}{17};\ -\frac{10}{17}\right)$.

6.3. OBSERVAȚII ASUPRA SISTEMELOR SIMETRICE

Numim sistem simetric de m ecuații cu n necunoscute $x, y, \dots, w$, un sistem de forma :

$$\begin{cases} f_1(x\ ;\ y\ ;\ \dots\ ;\ w) = 0, \\ f_2(x\ ;\ y\ ;\ \dots\ ;\ w) = 0, \\ \vdots \\ f_m(x\ ;\ y\ ;\ \dots\ ;\ w) = 0, \end{cases} \tag{40}$$

dacă $f_1, f_2, \dots, f_m$ sînt funcții simetrice de $x, y, \dots, w$, definite pe E^n, cu valori în $\mathbf{C}$, unde $E \subseteq \mathbf{C}$.

Datorită proprietăților funcțiilor simetrice, rezultă că $(x_0, y_0, \ldots, w_0) \in E^n$ fiind o soluție a sistemului (40); este, de asemenea, soluție orice permutare a acesteia.

Proprietatea unui sistem, de a admite ca soluție orice permutare a uneia dintre soluțiile sale, nu este caracteristică numai sistemelor simetrice.

Spre exemplu sistemul:

$$\begin{cases} 5x^2 - 9x + 6y - 8 = 0, \\ 5y^2 + 6x - 9y - 8 = 0, \end{cases}$$

admite soluțiile $(1; 2)$, $(2; 1)$; $(-1; -1)$, $\left(\frac{8}{5}; \frac{8}{5}\right)$, fără a fi sistem simetric în sensul definiției anterioare.

Pentru a sublinia unele probleme privind rezolvarea sistemelor simetrice apelăm la exemple numerice.

Exemple: 1) *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = -48; \end{cases} \quad (x; y) \in \mathbb{C}^2.$$

Dacă z_1 și z_2 sînt rădăcinile ecuației $z^2 - Sz + P = 0$ se știe că $z_1 + z_2 = S$ și $z_1 z_2 = P$. Punînd $S = 2$; $P = -48$, rezultă că soluțiile sistemului sînt $(z_1; z_2)$ și $(z_2; z_1)$.

Rezolvînd ecuația $z^2 - 2z - 48 = 0$ obținem $z_1 = -6$; $z_2 =$, deci sistemul din enunț are soluțiile $(-6; 8)$ și $(8; -6)$.

2) *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x - y = 25, \\ xy = -150; \end{cases} \quad (x; y) \in \mathbb{C}^2.$$

Observînd că putem scrie:

$$x + (-y) = 25; \; x(-y) = 150,$$

datorită celor indicate în exemplul anterior, găsirea soluțiilor sistemului propus implică rezolvarea ecuației:

$$z^2 - 25z + 150 = 0.$$

Deoarece obținem $z_1 = 10$; $z_2 = 15$, rezultă că avem:

$$(x = 10; -y = 15) \text{ sau } (x = 15; -y = 10).$$

Soluțiile sistemului propus sînt deci:

$$(x_1 = 10; y_1 = -15); (x_2 = 15; y_2 = -10)$$

3) *Să se rezolve sistemul :*

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = 11, \\ 2x^2 + xy + 2y^2 = 8, \end{cases} \quad (x\,;\,y) \in \mathbb{C}^2$$

Pentru rezolvare, observăm că sistemul se mai poate scrie şi sub forma :

$$(x + y)^2 - 5xy = 11\,;\; 2(x + y)^2 - 3xy = 8$$

Notînd $x + y = a$, $xy = b$, obţinem :

$$a^2 - 5b = 11\,;\; 2a^2 - 3b = 8;$$

de unde rezultă imediat $a^2 = 1$ şi $b = -2$. Avînd în vedere notaţiile făcute, sîntem conduşi la rezolvarea sistemelor :

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -2 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x + y = -1, \\ xy = -2 \end{cases}$$

ale căror soluţii sînt $(2\,;\,-1)$, $(-1\,;\,2)$ şi respectiv $(-2\,;\,1)$, $(1\,;\,-2)$.

Deci soluţiile sistemului iniţial sînt :

$$(2\,;\,-1)\,;\;(-1\,;\,2)\,;\;(-2\,;\,1)\,;\;(1\,;-2)$$

Observaţie. Rezolvarea unui sistem simetric, de două ecuaţii cu două necunoscute, este — în general — uşurată (din punct de vedere al calculelor) dacă se iau ca necunoscute auxiliare suma şi produsul necunoscutelor.

Pentru a veni în sprijinul acestei observaţii, sugerate de exemplul 3, prezentăm încă şi exemplul următor.

4) *Să se rezolve sistemul :*

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7, \\ x^2y + xy^2 = 6, \end{cases} \quad (x\,;\,y) \in \mathbb{C}^2.$$

Deoarece sistemul se mai scrie şi sub forma :

$$\begin{cases} (x + y)^2 - xy = 7, \\ xy(x + y) = 6, \end{cases}$$

notînd $x + y = s$; $xy = p$, rezultă :

$$s^2 - p = 7\,;\; sp = 6$$

Eliminînd p între cele două ecuații obținem ecuația $s^3 - 7s - 6 = 0$, ale cărei rădăcini sînt: $s_1 = -1$; $s_2 = -2$; $s_3 = 3$. Datorită ecuației $p = s^2 - 7$, deducem $p_1 = -6$; $p_2 = -3$; $p_3 = 2$. Revenind la notațiile făcute obținem sistemele:

$$\begin{cases} x + y = -1, \\ xy = -6, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -2, \\ xy = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2, \end{cases}$$

ale căror soluții se obțin imediat dacă avem în vedere exemplul 1. Deducem în final soluțiile sistemului din enunț:

$$(-3;\ 2);\ (2;\ -3);\ (-3;\ 1);\ (1;\ -3);\ (1;\ 2);\ (2;\ 1).$$

5) *Să se rezolve sistemul*:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ |x + y| + |x - y| = 4, \end{cases} \qquad (x;\ y) \in \mathbf{R}^2.$$

Deoarece $x^2 - y^2 = 3 > 0$, rezultă $|x^2 - y^2| = 3$, sau $|x - y| \cdot |x + y| = 3$. Deci sistemul din enunț este echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} |x + y| + |x - y| = 4, \\ |x + y| \cdot |x - y| = 3, \end{cases} \qquad (x;\ y) \in \mathbf{R}^2, \qquad (41)$$

cu condiția suplimentară ca numerele $x + y$ și $x - y$ să aibă același semn.

Sistemul (41) conduce la:

$$\begin{cases} |x + y| = 1, \\ |x - y| = 3, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} |x + y| = 3, \\ |x - y| = 1. \end{cases}$$

În primul caz avem:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 3, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x + y = -1, \\ x - y = -3, \end{cases}$$

de unde deducem soluțiile $(2;\ -1)$ și $(-2;\ 1)$.

În cel de al doilea caz avem:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x + y = -3, \\ x - y = -1, \end{cases}$$

deci obținem și soluțiile $(2;\ 1)$ și $(-2;\ -1)$.

Răspuns: $(2;\ -1)$; $(-2;\ 1)$; $(2;\ 1)$; $(-2;\ -1)$.

6.4. OBSERVAŢII ASUPRA SISTEMELOR DE DOUĂ ECUAŢII OMOGENE DE GRADUL DOI CU DOUĂ NECUNOSCUTE

Să considerăm ecuaţia de gradul doi cu coeficienţi complecşi :

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d.$$

Deoarece oricare ar fi $(x ; y) \in \mathbf{C}^2$ avem $ax_0^2 + bx_0y_0 + cy_0^2 = d \Leftrightarrow \Leftrightarrow a(-x_0)^2 + b(-x_0)(-y_0) + c(-y_0)^2 = d$, rezultă că $(x_0 ; y_0) \in \mathbf{C}^2$ fiind soluţie a ecuaţiei, este, de asemenea, soluţie şi $(-x_0 ; -y_0)$.

Fie acum sistemul :

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1, \\ a_2y^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2, \end{cases} \quad (x ; y) \in \mathbf{C}^2. \tag{42}$$

Datorită observaţiei anterioare rezultă că sistemul (42) are sau două soluţii :

$$(x_0 ; y_0) ; (-x_0 ; -y_0),$$

sau patru soluţii:

$$(x_0 ; y_0) ; (-x_0 ; -y_0) ; (x_0' ; y_0') ; ; (-x_0' ; -y_0').$$

Deci rezolventa în x este sau $x^2 - x_0^2 = 0$ sau $x^4 - (x_0^2 + x_0'^2)x^2 + x_0^2x_0'^2 = 0$, ceea ce confirmă că sistemul (42) poate fi întotdeauna rezolvat cu ajutorul cunoştinţelor de matematică din liceu. (Evident aceleaşi observaţii se pot face şi în legătură cu rezolventa în y.)

În continuare prezentăm o serie de exemple dintre care primele trei expun cele mai utilizate procedee de rezolvare a sistemelor de două ecuaţii omogene de gradul doi, cu două necunoscute.

Exemple : 1) *Să se rezolve sistemul :*

$$\begin{cases} 3x^2 - 3xy - y^2 = 5, \\ x^2 + 3xy + 5y^2 = 15, \end{cases} \quad (x ; y) \in \mathbf{C}^2.$$

Aplicăm modul de lucru propus la 6.2. Pentru aceasta, înmulţind ambele părţi ale primei ecuaţii cu 5 şi adunînd, parte cu parte, cu a doua ecuaţie a sistemului, obţinem ecuaţia $16x^2 - 12xy = 40$. Observînd că avem $x \neq 0$, putem scrie în continuare :

$$y = \frac{4x^2 - 10}{3x}. \tag{42'}$$

Substituind în prima ecuaţie a sistemului (rezultatul este acelaşi dacă se substituie în a doua ecuaţie) rezultă :

$$3x^2 - (4x^2 - 10) - \left(\frac{4x^2 - 10}{3x}\right)^2 = 5,$$

de unde deducem:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0,$$

deci

$$x_1 = -2;\ x_2 = -1;\ x_3 = 1;\ x_4 = 2.$$

Înlocuind, pe rînd, valorile obţinute pentru x, în (42′), găsim valorile corespunzătoare pentru y:

$$y_1 = -1,\ y_2 = 2;\ y_3 = -2;\ y_4 = 1.$$

Soluţiile sistemului sînt: $(-2;\ -1);\ (-1;\ 2);\ (1;\ -2);\ (2;\ 1)$.

2) *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = -11, \\ 9x^2 - 2xy + y^2 = 33, \end{cases} \quad (x;\ y) \in \mathbf{C}^2. \qquad (43)$$

Înlocuim $y = tx$ în fiecare din ecuaţiile sistemului. Rezultă:

$$\begin{cases} x^2(1 - t - t^2) = -11, \\ x^2(9 - 2t + t^2) = 33. \end{cases}$$

Observînd că din sistemul (43) rezultă $x \neq 0$ (înlocuind $x = 0$ în ambele ecuaţii ale sistemului obţinem contradicţie), deducem:

$$\frac{1 - t - t^2}{9 - 2t + t^2} = -\frac{1}{3},$$

de unde rezultă $2t^2 + 5t - 12 = 0$, ecuaţie ale cărei rădăcini sînt $t_1 = -4$; $t_2 = \frac{3}{2}$. Avem deci sau $y = -4x$, sau $y = \frac{3}{2}x$, şi ca atare vom rezolva sistemele:

$$\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = -11, \\ y = -4x \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x^2 - xy - y^2 = -11, \\ y = \frac{3}{2}x. \end{cases}$$

Se obţin pentru sistemul din enunţ soluţiile:

$$(-1;\ 4);\ (1;\ -4);\ (2;\ 3);\ (-2;\ -3).$$

3) *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} 2x^2 + 6xy - 3y^2 = -7, \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

Adunînd cele două ecuații, parte cu parte, rezultă ecuația $3x^2 + 5xy - 2y^2 = 0$, de unde deducem sau $x = \frac{1}{3}y$ sau $x = -2y$. În continuare rezolvăm sistemele:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ 3x = y \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x = -2y. \end{cases}$$

Răspuns:

$$(1\,;\,3)\,;\,(-1\,;\,-3)\,;\,(2\,;\,-1)\,;\,(-2\,;\,1).$$

Recomandăm ca în rezolvarea sistemelor de două ecuații omogene de gradul doi, cu două necunoscute să nu se treacă imediat la aplicarea unuia din procedeele prezentate în exemplele 1, 2, 3, deoarece anumite particularități ale problemei pot ușura munca de obținere a soluției. Încercăm să întărim recomandarea făcută prin exemplele 4 și 5.

4) $3x^2 + xy + 10y^2 = 12\,;\ x^2 - 2xy + y^2 = 4.$
Datorită ecuației a doua, sîntem conduși la rezolvarea sistemelor:

$$\begin{cases} 3x^2 + xy + 10y^2 = 12, \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} 3x^2 + xy + 10y^2 = 12, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

5) *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x^2 + xy + ay^2 = a + 2\,; \\ bx^2 - xy + 2y^2 = 3(b + 2)\,; \quad a, \quad b \in \mathbf{C}, \end{cases}$$

știind că admite soluția $(-1\,;\,2)$.

Înlocuind în ambele ecuații $x = -1\,;\ y = 2$, se obține $a = 1,\ b = 2$ Sistemul se scrie:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3\,; \\ 2x^2 - xy + 2y^2 = 12 \end{cases}$$

și — fiind simetric și omogen — mai deducem soluțiile:

$$(2\,;\,-1),\ (1\,;\,-2),\ (-2\,;\,1).$$

Deoarece numărul maxim de soluții ale sistemului este patru, rezolvarea este încheiată.

CAPITOLUL V

INEGALITĂŢI

§ 1. GENERALITĂŢI

Fie a şi b două numere reale. Prin definiţie numărul a se zice *strict mai mic* decît numărul b, dacă există numărul strict pozitiv p astfel încît $a + p = b$. Scriem în acest caz $a < b$. Relaţia „<" se zice relaţie de *inegalitate strictă* pe **R**.

De asemenea, se defineşte *relaţia de inegalitate* (nestrictă) „$\leqslant$" pe **R** prin $a \leqslant b$, dacă $a < b$ sau $a = b$. În plus dacă $b < a$ scriem şi $a > b$ („a este strict mai mare decît b").

Dacă $a, b, c, \ldots$ sînt numere reale, enumerăm următoarele *proprietăţi* :

1°. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$.

2°. $\left.\begin{matrix} a < b \\ k > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ak < bk$ şi $\left.\begin{matrix} a < b \\ k < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ak > bk$.

3°. $\left.\begin{matrix} a < b \\ c < d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a + c < b + d$.

4°. $\left.\begin{matrix} 0 \leqslant a < b \\ 0 \leqslant c < d \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac < bd$.

5°. *Relaţia de inegalitate nestrictă pe* **R** *este* :

— *reflexivă* ($a \leqslant a$ oricare ar fi $a \in \mathbf{R}$),

— *antisimetrică* ($a \leqslant b$ şi $b \leqslant a$ implică $a = b$),

— *tranzitivă* ($a \leqslant b$ şi $b \leqslant c$ implică $a \leqslant c$).

6°. *Dacă* $a > 0$, $b > 0$ şi $n \in \mathbf{N}^*$, *atunci* :

$$a < b \Leftrightarrow a^n < b^n \ ; \ a < b \Leftrightarrow a^{-n} > b^{-n}.$$

7°. $|ab| \geqslant ab$;

8°. $|a + b| \leqslant |a| + |b|$;

9°. $|a - b| \geqslant |a| - |b|$.

În continuare dăm demonstraţiile acestora.

1°. Prin ipoteză există $p > 0$ astfel încît $a + p = b$, deci $(a + c) + p = (b + c)$, de unde deducem $a + c < b + c$.

2°. Avem $a + p = b$, deci $ak + pk = bk$. Dacă $k > 0$, atunci $pk > 0$ şi rezultă $ak > bk$. Dacă $k < 0$, putem scrie $ak = bk + (-pk)$ şi cum $-pk > 0$, rezultă $ak > bk$.

3°. Din ipoteză rezultă că există $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ astfel încît $a + p_1 = b$, $c + p_2 = d$, deci $(a + c) + (p_1 + p_2) = b + d$, şi cum $p_1 + p_2 > 0$ rezultă $a + c < b + d$.

4°. Putem scrie $a + p_1 = b$, $c + p_2 = d$ deci $(a + p_1)(c + p_2) = bd$, sau $ac + (ap_2 + cp_1 + p_1p_2) = bd$. Deoarece $ap_2 + cp_1 + p_1p_2 > 0$, deducem $ac < bd$.

5°. Reflexivitatea rezultă imediat din definiţia relaţiei de inegalitate (nestrictă).

Să presupunem acum că avem $a \leqslant b$ şi $b \leqslant a$, deci există numerele $p_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0$ astfel încît $a + p_1 = b$ şi $b + p_2 = a$. Deducem $(a + b) + (p_1 + p_2) = a + b$, de unde $p_1 + p_2 = 0$ şi cum $p_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0$, rezultă $p_1 = p_2 = 0$, deci $a = b$ şi proprietatea de antisimetrie a relaţiei de ordine (nestrictă) este dovedită.

Pentru a demonstra şi proprietatea de tranzivitate, să observăm că, din $a \leqslant b$ şi $b \leqslant c$, deducem existenţa numerelor $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, astfel încît $a + p = b$ şi $b + q = c$; de unde rezultă $a + (p + q) = c$, deci $a < c$.

6°. Deoarece $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, suma din ultima paranteză fiind pozitivă datorită condiţiilor ipotezei, deducem $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$.

În plus putem scrie, pentru $a > 0$, $b > 0$:

$$a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^n > \left(\frac{1}{b}\right)^n \Leftrightarrow a^{-n} > b^{-n}.$$

7°. Se deduce imediat deoarece $|x| \geqslant x$ oricare ar fi x real.

8°. Putem scrie:

$$(|a + b|)^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leqslant a^2 + 2|ab| + b^2 =$$

$$= |a|^2 + 2|a| \cdot |b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2,$$

de unde, prin aplicarea proprietăţii 6°, deducem $|a + b| \leqslant |a| + |b|$. Facem în plus observaţia că proprietăţile 7° şi 8° pot fi generalizate. Astfel dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere reale, se verifică inegalităţile:

$$|a_1a_2\ldots a_n| \geqslant a_1a_2\ldots a_n$$

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|.$$

(Prima inegalitate este evidentă, datorită observaţiei făcute la cazul $n = 2$. A doua inegalitate se obţine — spre exemplu — prin inducţie.)

9°. Observînd că putem scrie $a = (a - b) + b$, deducem $|a| = |(a - b) + b| \leqslant |a - b| + |b|$, de unde rezultă $|a - b| \geqslant |a| - |b|$.

§ 2. INEGALITĂŢI UZUALE

În practica rezolvării problemelor, din manuale şi din culegerile de probleme care se adresează elevilor, cele referitoare la inegalităţi apelează în majoritatea cazurilor la unele *inegalităţi cunoscute*, pe care le numim aici inegalităţi uzuale. Prezentăm în continuare unele dintre acestea:

1°. *Dacă* $a > 0$ *atunci* $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$ *şi dacă* $a < 0$ *se verifică* $a + \frac{1}{a} \leqslant 2$.

În ipoteza $a > 0$ putem scrie $a + \frac{1}{a} \geqslant 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geqslant 2a \Leftrightarrow (a - 1)^2 \geqslant 0$.

Asemănător se demonstrează şi cea de a doua inegalitate.

2°. *Oricare ar fi numerele reale a, b, c, putem scrie:*

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geqslant 0,$$

cu egal dacă şi numai dacă numerele a, b, c sînt egale.

Demonstraţia este imediată dacă observăm că putem scrie:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2].$$

3°. *Lungimile laturilor unui triunghi fiind a, b, c, se verifică inegalitatea*

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca < 0.$$

În condiţiile enunţului putem scrie:

$$|b - c| < a;\ |c - a| < b,\ |a - b| < c,$$

deci

$$b^2 - 2bc + c^2 < a^2;\ c^2 - 2ac + a^2 < b^2,$$
$$a^2 - 2ab + b^2 < c^2.$$

Rezultă $2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) < a^2 + b^2 + c^2$, de unde deducem inegalitatea din enunţ.

4°. *Dacă* $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$, *există inegalitatea:*

$$|ax + by + cz| \leqslant 1,$$

cu egal dacă şi numai dacă numerele a, b, c sînt direct proporţionale cu numerele x, y, z.

Pentru demonstrație utilizăm identitatea lui Lagrange:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 =$$
$$= (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2,$$

de unde, în condițiile enunțului, putem scrie:

$$(ax + by + cz)^2 \leqslant 1,$$

care este inegalitatea din enunț.

5° *Inegalitățile dintre mediile aritmetică (m_a), geometrică (m_g) și armonică (m_h) a n numere reale strict pozitive, pentru cazurile $n = 2, 3, 4$:*

$$m_h \leqslant m_g \leqslant m_a, \tag{1}$$

cu egal dacă și numai dacă numerele considerate sînt egale.

Pentru $n = 2$ inegalitățile (1) se scriu:

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$$

și demonstrația este imediată.

Fie numerele reale strict pozitive x, y, z. Putem scrie:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$

Deoarece $x + y + z > 0$ și $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geqslant 0$, deducem:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geqslant 0. \tag{2}$$

Dacă a, b, c sînt numere reale strict pozitive, să notăm $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$, $z = \sqrt[3]{c}$. Din (2) deducem:

$$a + b + c - 3\sqrt[3]{abc} \geqslant 0,$$

adică $m_a \geqslant m_g$ pentru $n = 3$. Se observă din $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0 \Rightarrow x = y = z$, că obținem $m_a = m_g$ dacă și numai dacă $a = b = c$.

Inegalitatea $m_h \leqslant m_g$, pentru $n = 3$, este:

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leqslant \sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right),$$

ceea ce reprezintă inegalitatea $m_g \leqslant m_a$ pentru numerele $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$.

Să considerăm acum numerele reale strict pozitive a, b, c, d. Putem scrie :

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geqslant \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}},$$

deci

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd},$$

adică inegalitatea $m_a \geqslant m_g$, pentru $n = 4$.

Pentru a demonstra inegalitatea $m_h \leqslant m_g$, în cazul $n = 4$, facem aceeași observație ca și în cazul $n = 3$.

§ 3. INEGALITĂȚI REMARCABILE

Vom prezenta aici unele inegalități a căror importanță rezultă din numeroasele posibilități de utilizare în practica matematică, și care socotim necesar a face parte din cultura matematică a elevului din ultimile clase de liceu sau a celui care este membru al unui cerc de matematică.

1°. Inegalitatea mediilor. *Fie* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *numere reale strict pozitive.* Notațiile fiind cele din paragraful precedent, *se verifică inegalitățile :*

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n} x_i \leqslant m_h \leqslant m_g \leqslant m_a \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} x_i \tag{3}$$

cu egal dacă și numai dacă numerele sînt egale.

Pentru demonstrație. să arătăm întîi că oricum am alege $n \geqslant 2$ numere reale strict pozitive a căror sumă este numărul S, fixat, produsul acestora este maxim dacă numerele sînt egale.

În adevăr să presupunem că $P_{max} = x_1^0 \cdot x_2^0 \ldots x_n^0$, cu $x_1^0 + x_2^0 + \ldots + x_n^0 = S$, dar fără ca toate numerele $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ să fie egale între ele. Nu particularizăm demonstrația dacă considerăm $x_1^0 \neq x_2^0$. În acest caz, fie :

$$P' = \frac{x_1^0 + x_2^0}{2} \cdot \frac{x_1^0 + x_2^0}{2} \cdot x_3^0 x_4^0 \ldots x_n^0.$$

Deoarece $x_1^0 \neq x_2^0$ avem și $\left(\frac{x_1^0 + x_2^0}{2}\right)^2 > x_1^0 x_2^0$, deci $P' > P_{max}$, imposibil. Afirmația făcută este deci demonstrată.

Rezultă de aici că oricare ar fi numerele reale strict pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_n$, notînd $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, se verifică inegalitatea

$$x_1 x_2 \ldots x_n \leqslant \left(\frac{S}{n}\right)^n,$$

cu egal dacă și numai dacă numerele sînt egale.

Inegalitatea obținută se mai scrie:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

ceea ce demonstrează a treia inegalitate (3).

Pentru a doua inegalitate (3) se va observa că aceasta este echivalentă cu inegalitatea dintre mediile geometrică și aritmetică a numerelor: $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$.

Prima și ultima inegalitate se deduc imediat din

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i \leqslant x_k \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i,$$

pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n$.

2°. Inegalitatea lui Bernoulli

$$(1 + a)^n \geqslant 1 + na; \; a \in (-1; +\infty), \; n \in \mathbb{N}.$$

Deoarece pentru $n = 0$ și pentru $n = 1$ inegalitatea se verifică, vom presupune în continuare $n \geqslant 2$.

Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere reale strict pozitive, putem scrie:

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) = 1 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + \ldots > 1 + \\ + (a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Punînd acum $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, deducem $(1 + a)^n > 1 + na$ și inegalitatea este demonstrată pentru $a > 0$, $n \geqslant 2$.

Dacă $a = 0$, verificarea este imediată.

Fie $-1 < a < 0$, $n \geqslant 2$ și să considerăm inegalitatea evidentă:

$$(1 + a)^{n-1} + (1 + a)^{n-2} + \ldots + (1 + a) + 1 < n,$$

deci

$$[(1 + a) - 1][(1 + a)^{n-1} + (1 + a)^{n-2} + \ldots + (1 + a) + 1] > na,$$

de unde deducem $(1 + a)^n - 1 > na$, ceea ce demonstrează inegalitatea lui Bernoulli și în acest ultim caz.

3°. **Inegalitatea lui Jensen.** Considerăm necesare pentru început unele precizări :

— *Dacă x_1, x_2 sînt două numere reale, $x_1 < x_2$, oricare ar fi numerele reale pozitive m și n, cu $m + n \neq 0$, se verifică inegalitățile :*

$$x_1 \leqslant \frac{mx_1 + nx_2}{m+n} \leqslant x_2.$$

Demonstrația este imediată.

— Fie E un interval (finit sau infinit) al axei reale. Funcția $f : E \to \mathbf{R}$ se zice convexă pe E dacă :

$$f\left(\frac{mx_1 + nx_2}{m+n}\right) \leqslant \frac{mf(x_1) + nf(x_2)}{m+n}, \qquad (4)$$

oricare ar fi x_1, x_2 din E și oricare ar fi numerele reale pozitive m și n, $m + n \neq 0$.

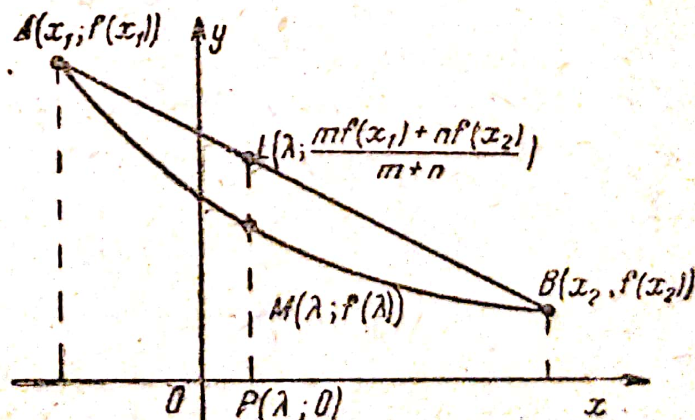
Dacă se schimbă sensul inegalității în (4), se obține definiția funcției concave.

Să considerăm inegalitatea (4) și fie $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ două puncte ale graficului funcției f. Notăm π_1, semiplanul determinat de dreapta AB în planul xoy, a cărui intersecție cu semiaxa negativă a ordonatelor este o semidreaptă. Geometric, inegalitatea (4) afirmă că mulțimea punctelor graficului funcției f, cu $x \in [x_1 ; x_2]$ este inclusă în $\pi_1 \cup AB$ $\left(\text{vezi fig. nr. 2, unde s-a notat } \lambda = \frac{mx_1 + nx_2}{m+n}\right)$.

Menționăm în plus că dacă $f : E \to \mathbf{R}$, este de două ori derivabilă, o condiție necesară și suficientă pentru ca f să fie convexă (concavă) pe E, este $f''(x) \geqslant 0$ $f''(x) \leqslant 0)$ oricare ar fi $x \in E$. (Pentru demonstrație vezi, spre exemplu, „Curs de calcul diferențial și integral", G. M. Fihtenholț, Ed. Tehnică, 1963).

Cu acestea putem enunța *inegalitatea lui Jensen* :

„Fie E un interval și $f : E \to \mathbf{R}$. Dacă f este convexă pe E atunci oricare ar fi $x_1, x_2, \ldots x_n \in E$



g . nr. 2.

și oricare ar fi numerele pozitive $p_1, p_2, \ldots, p_n$, nu toate nule, se verifică inegalitatea :

$$f\left(\frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}\right) \leqslant \frac{p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \ldots + p_nf(x_n)}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}. \qquad (5)$$

Prezentăm o *demonstrație* prin inducție. Pentru $n = 1$ verificarea este imediată, iar pentru $n = 2$ se obține definiția funcției convexe.

Să presupunem acum că (5) se verifică pentru $k \geqslant 2$, oricare ar fi numerele $x_1, x_2, \ldots, x_k$ și $p_1, p_2, \ldots, p_k$, îndeplinind condițiile enunțului și fie, în aceleași condiții, numerele $x_1', x_2', \ldots, x_{k+1}'$ și $p_1', p_2', \ldots, p_{k+1}'$. Notînd $p_1' + p_2' + \ldots + p_k' = S$, putem scrie :

$$f\left(\frac{p_1'x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_{k+1}x_{k+1}}{p_1' + p_2' + \ldots + p_{k+1}'}\right) = f\left(\frac{S\left(\frac{p_1'}{S}x_1' + \ldots + \frac{p_k'}{S}x_k'\right) + p_{k+1}'x_{k+1}'}{S + p_{k+1}'}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{S\cdot f\left(\frac{p_1'}{S}x_1 + \ldots + \frac{p_k'}{S}x_k'\right) + p_{k+1}'f(x_{k+1}')}{S + p_{k+1}'} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{S\left(\frac{p_1'}{S}f(x_1') + \ldots + \frac{p_k'}{S}f(x_k')\right) + p_{k+1}'f(x_{k+1}')}{S + p_{k+1}'} =$$

$$= \frac{p_1'f(x_1') + p_2'f(x_2') + \ldots + p_{k+1}'f(x_{k+1}')}{p_1' + p_2' + \ldots + p_{k+1}'},$$

ceea ce demonstrează că (5) se verifică și pentru $k + 1$. Cu acestea, demonstrația inegalității lui Jensen este încheiată.

Menționăm că se verifică imediat că s-au atribuit argumentului funcției f valori din E. În plus facem observația că, dacă f este concavă pe E, se demonstrează relația analoagă cu (5), în care se schimbă sensul inegalității.

4°. **Inegalitatea lui Hölder.** *Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt numere reale pozitive, p și q numere mai mari decît 1 și $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se verifică inegalitatea :*

$$\Sigma x_iy_i \leqslant (\Sigma x_i^p)^{\frac{1}{p}}\cdot(\Sigma y_i^q)^{\frac{1}{q}},$$

sumele fiind extinse la toate valorile lui $i = 1, 2, \ldots, n$.

Fie, pentru *demonstrație*, funcția $f : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^p$, $(p \geqslant 1)$.



Deducem imediat $f''(x) \geqslant 0$, oricare ar fi $x \in [0 ; +\infty)$, deci f este convexă.

Aplicînd inegalitatea lui Jensen, deducem:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i u_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}\right)^p \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i u_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i},$$

unde $a_i > 0$ și $u_i \in [0 ; +\infty)$, pentru toate valorile lui $i = 1, 2, \ldots, n$. Înlocuind

$$a_i = y_i^{\frac{p}{p-1}} \text{ și } u_i = x_i y_i^{\frac{1}{1-p}},$$

putem scrie succesiv:

$$\left(\frac{\Sigma x_i y_i}{\Sigma y_i^{\frac{p}{p-1}}}\right)^p \leqslant \frac{\Sigma x_i^p}{\Sigma y_i^{\frac{p}{p-1}}} \Leftrightarrow \Sigma x_i y_i \leqslant \frac{(\Sigma x_i^p)^{\frac{1}{p}}\left(\Sigma y_i^{\frac{p}{p-1}}\right)}{\left(\Sigma y_i^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Sigma x_i y_i \leqslant (\Sigma x_i^p)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\Sigma y_i^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}},$$

sumele fiind extinse pentru toate valorile lui $i = 1, 2, \ldots, n$. Observînd că ultima inegalitate este aceeași cu cea din enunț, demonstrația este terminată.

Facem observația că în cazul $p = 2$ inegalitatea lui Hölder se scrie

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right),$$

și sub această formă este cunoscută sub denumirea de inegalitatea lui Cauchy-Buniakowscki-Schwartz. (Vezi manual de algebră pentru clasa a X-a.)

5°. **Inegalitatea lui Minkowski.** *Dacă* $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ *sînt numere reale pozitive și* $p \in \mathbf{R}$, $p \geqslant 1$, *se verifică inegalitatea:*

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Aplicînd inegalitatea lui Hölder, putem scrie:

$$\Sigma(x_i + y_i)^p = \Sigma(x_i + y_i)^{p-1}x_i + \Sigma(x_i + y_i)^{p-1}y_i \leqslant$$

$$\leqslant \left[\Sigma(x_i + y_i)^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}} (\Sigma x_i^p)^{\frac{1}{p}} + \left[\Sigma(x_i + y_i)^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}} \cdot (\Sigma y_i^p)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= [\Sigma(x_i + y_i)^p]^{\frac{p-1}{p}} \left[(\Sigma x_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\Sigma y_i^p)^{\frac{1}{p}}\right],$$

sumele fiind extinse la toate valorile $i = 1, 2, \ldots, n$. Se deduce de aici imediat inegalitatea din enunț.

§ 4. APLICAȚII

Ne propunem să prezentăm unele exemple de demonstrare a inegalităților:

— utilizînd proprietăți ale numerelor reale (Exemplele 1, 2, 3);
— ca aplicații ale inegalităților cunoscute (Exemplele 4, 5, 6, 7);
— utilizînd metoda inducției matematice (Exemplul 8);
— utilizînd proprietăți cunoscute ale funcțiilor elementare (Exemplele 9, 10);
— utilizînd procedee ale calculului diferențial (Exemplele 11, 12, 13);
— ca aplicații ale cunoștințelor de geometrie (Exemplele 14, 15).

Exemple: 1) *Dacă a, b, c sînt numere reale a căror sumă este zero sau* 1, *să se demonstreze inegalitatea:*

$$ab + bc + ca < \frac{3}{2}.$$

Oricare ar fi numărul real x, putem scrie $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, deci $x^2 - x + 1 > 0$. Înlocuind succesiv, x cu a, b, c, deducem:

$$a^2 + 1 > a, \quad b^2 + 1 > b, \quad c^2 + 1 > c,$$

de unde $a^2 + b^2 + c^2 + 3 > a + b + c$, sau

$$(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) + 3 > a + b + c.$$

Înlocuind în ultima inegalitate $a + b + c = 0$ sau $a + b + c = 1$, deducem inegalitatea din enunț.

2) *Fie numerele reale* $a > 0$, $b > 0$. *Oricare ar fi numărul natural* n, *se verifică inegalitatea:*

$$\left(\frac{a + b}{2}\right)^n < a^n + b^n.$$

Pentru început să observăm că inegalitatea este evidentă dacă $n = 0$ sau $n = 1$. Presupunînd $n \geqslant 2$, putem scrie:

$$a < \sqrt[n]{a^n + b^n}; \quad b < \sqrt[n]{a^n + b^n},$$

de unde deducem $a + b < 2\sqrt[n]{a^n + b^n}$, care conduce imediat la inegalitatea din enunț.

3) *Să se demonstreze inegalitatea:*

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2} \geqslant \frac{a + b + c}{3},$$

a, b, c fiind numere reale pozitive.

Oricare ar fi numerele reale pozitive x și y putem scrie $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 = (x - y)^2(x + y) \geqslant 0$, deci $x^3 + y^3 \geqslant x^2y + xy^2$. Deducem de aici: $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + ab^2$, $b^3 + c^3 \geqslant b^2c + bc^2$; $c^3 + a^3 \geqslant c^2a + ca^2$, de unde rezultă:

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geqslant a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + ca^2.$$

Ultima inegalitate mai poate fi scrisă:

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geqslant (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) - (a^3 + b^3 + c^3),$$

sau

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2} \geqslant \frac{a + b + c}{3}.$$

4) *Oricare ar fi numărul natural $n > 1$, se verifică inegalitatea:*

$$n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1).$$

Utilizînd inegalitatea mediilor putem scrie:

$$\frac{1 + 3 + \ldots + (2n - 1)}{n} > \sqrt[n]{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)}.$$

Deoarece $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ (progresie aritmetică), deducem

$$n > \sqrt[n]{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)},$$

de unde rezultă imediat inegalitatea din enunț.

5) *Fie a_1, a_2, $\ldots$, a_n, numere pozitive și $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Să se arate că:*

$$S \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{S - a_k} \geqslant \frac{n^2}{n - 1}.$$

Pentru rezolvare vom transforma succesiv inegalitatea din enunț:

$$S \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{S - a_k} \geqslant \frac{n^2}{n-1} \Leftrightarrow \frac{(n-1)S}{n} \geqslant \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{S - a_k}}.$$

Dar $(n-1)S = nS - S = \sum_{k=1}^{n}(S - a_k)$, deci ultima inegalitate se scrie

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(S - a_k)}{n} \geqslant \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{S - a_k}},$$

care este inegalitatea dintre media aritmetică și media armonică a numerelor pozitive $S - a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

6) *Notațiile fiind cele din geometria triunghiului, să se demonstreze inegalitatea:*

$$6Rr \leqslant \sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Să observăm întîi că putem scrie:

$$abc = 4RS = 4Rpr = 2Rr(a + b + c).$$

Deci:

$$\frac{Rr(a + b + c)}{abc} = \frac{1}{2},$$

sau

$$\frac{Rr}{bc} + \frac{Rr}{ca} + \frac{Rr}{ab} = \frac{1}{2}.$$

Inegalitatea dintre media geometrică și media aritmetică a numerelor $\frac{Rr}{bc}, \frac{Rr}{ca}, \frac{Rr}{ab}$ și egalitatea precedentă conduc la:

$$\frac{R^3r^3}{a^2b^2c^2} \leqslant \frac{1}{6^3}, \text{ de unde } 6Rr \leqslant \sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

7) *În orice triunghi se verifică inegalitatea:*

$$\frac{r_a}{a} \cdot \frac{r_b}{b} \cdot \frac{r_c}{c} \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

Inegalitatea din enunț se poate transforma succesiv

$$\frac{pS^3}{S^2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8} abc \Leftrightarrow \frac{p}{R} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ultima inegalitate se deduce imediat, aplicînd inegalitatea lui Jensen funcției concave $f:[0;\ \pi] \to [-1;\ 1]$, $f(x) = \sin x$:

$$\sin \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geqslant \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3}{3}$$

și înlocuind $x_1 = A$, $x_2 = B$, $x_3 = C$.

8) *Dacă* $x \in [0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$ *iar* $p > q$ *sînt două numere naturale strict pozitive, atunci:*

$$\frac{x^p - 1}{p} > \frac{x^q - 1}{q}$$

(Culegere de probleme — V. A. Krecimar)

Pentru $x = 0$ inegalitatea se verifică. Presupunem $x \in (0;\ 1) \cup \cup (1;\ +\infty)$ și facem inducție după p.

Dacă $p = q + 1$ (prin ipoteză $p > q$) inegalitatea devine:

$$\frac{x^{q+1} - 1}{q + 1} > \frac{x^q - 1}{q} \Leftrightarrow \frac{1}{x^q} > (1 - x)q + 1.$$

Notînd $\frac{1}{x} = 1 + \alpha$, cu $1 + \alpha > 0$, $\alpha \neq 0$ (vezi ipoteza), ultima inegalitate se scrie $(1 + \alpha)^q > 1 + \frac{\alpha}{1 + \alpha}$. În plus $\alpha > \frac{\alpha}{1 + \alpha}$ și, utilizînd inegalitatea lui Bernoulli, putem scrie:

$$(1 + \alpha)^q > 1 + q\alpha > 1 + \frac{\alpha}{1 + \alpha} q,$$

ceea ce demonstrează inegalitatea din enunț pentru $p = q + 1$, adică

$$\frac{x^{q+1} - 1}{q + 1} > \frac{x^q - 1}{q}, \qquad (6)$$

oricare ar fi numărul natural $q \geqslant 1$.

Să presupunem acum că:

$$\frac{x^p - 1}{p} > \frac{x^q - 1}{q} \qquad (6')$$

unde $q \geqslant 1$ și $p \geqslant q + 1$. Datorită inegalității (6') avem și

$$\frac{x^{p+1} - 1}{p + 1} > \frac{x^p - 1}{p}. \qquad (6'')$$

Din (6′) și (6″) deducem:

$$\frac{x^{p+1}-1}{p+1} > \frac{x^q-1}{q},$$

ceea ce demonstrează inegalitatea (6′) pentru $q \geqslant 1$ și $p+1 \geqslant q+2$.

Cu acestea demonstrația este încheiată.

9) *Să se demonstreze inegalitățile:*

$$\log_7 11 > \log_9 14 > \log_{11} 17.$$

Pentru demonstrație vom observa că putem scrie:

$$\log_7 \frac{11}{7} > \log_7 \frac{14}{9} \text{ și } \log_7 \frac{14}{9} > \log_9 \frac{14}{9},$$

ambele inegalități fiind consecințe ale proprietăților de monotonie a funcției logaritmice cu baza supraunitară. De aici deducem:

$$\log_7 \frac{11}{7} > \log_9 \frac{14}{9}, \text{ deci } \log_7 11 > \log_9 14,$$

prima inegalitate fiind astfel demonstrată. În mod analog se demonstrează și cea de a doua inegalitate.

10) *Fie a și b două numere reale strict pozitive. Oricare ar fi $x \in [0 : 1]$ se verifică inegalitățile:*

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}\left[a\left(\frac{b}{a}\right)^x + b\left(\frac{a}{b}\right)^x\right] \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

Să observăm că pentru $a = b$ inegalitățile se verifică. Fie deci $a \neq b$ și să considerăm funcția:

$$f:[0\,;\,1] \to \mathbf{R},\ f(x) = a\left(\frac{b}{a}\right)^x + b\left(\frac{a}{b}\right)^x.$$

Datorită simetriei funcției f în raport cu parametrii a și b este suficient să studiem numai cazul $a > b$. Definim în plus funcțiile:

$$z:[0\,;\,1] \to \left[1\,;\,\frac{a}{b}\right],\ z(x) = \left(\frac{a}{b}\right)^x,$$

$$g:\left[1\,;\,\frac{a}{b}\right] \to \mathbf{R},\ g(x) = \frac{1}{2}\left(bx + \frac{a}{x}\right).$$

Funcția z este strict crescătoare și bijectivă. În plus $f = g \circ z$.

Putem scrie :

$$g(x_1) - g(x_2) = b\,\frac{x_1 - x_2}{x_1 x}\left(x_1x_2 - \frac{a}{b}\right), \text{ unde } 1 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{a}{b}.$$

Deducem de aici :

$$1 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \sqrt{\frac{a}{b}} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 < 0 \\ x_1x_2 - \dfrac{a}{b} < 0 \end{cases} \Rightarrow g(x_1) - g(x_2) > 0,$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{a}{b} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 < 0 \\ x_1x_2 - \dfrac{a}{b} > 0 \end{cases} \Rightarrow g(x_1) - g(x_2) < 0.$$

Deci $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow 1 \leqslant z(x_1) < z(x_2) \leqslant \sqrt{\frac{a}{b}} \Rightarrow g(z(x_1)) - g(z(x_2)) > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$, ceea ce demonstrează că funcţia f este strict descrescătoare pe $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.

În mod analog se demonstrează că funcţia este strict crescătoare pe $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$.

Deoarece $f(0) = f(1) = a + b$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{ab}$, deducem datorită monotoniei funcţiei f:

$$2\sqrt{ab} \leqslant f(x) \leqslant a + b, \ \forall x, \ x \in [0 ; 1],$$

ceea ce demonstrează inegalităţile din enunţ.

11) *Dacă πV, πA şi πS sînt respectiv volumul, aria totală şi aria laterală ale unui con circular drept, se verifică inegalităţile :*

a) $A^3 \geqslant 72\ V^2$ b) $2S^3 \geqslant 27\sqrt{3}\ V^2$.

Să se stabilească condiţiile în care se verifică egalitatea.

Pentru a demonstra prima inegalitate să observăm că, din formulele care dau volumul şi aria totală a conului, deducem :

$$h = \frac{3\,V}{R^2}; \qquad g = \frac{A - R^2}{R},$$

unde h, g şi R sînt lungimile înălţimii, generatoarei şi razei bazei conului. Înlocuind în $g^2 = h^2 + R^2$, deducem :

$$2Ax^2 - A^2x + 9V^2 = 0, \tag{7}$$

unde s-a notat $R^2 = x$.

Ecuaţia (7) are rădăcini reale (şi în acest caz sînt numere strict pozitive) dacă şi numai dacă discriminantul este pozitiv, deci $A^3 \geqslant 72V^2$. Din (7) deducem că avem $A^3 = 72V^2$, dacă şi numai dacă $A = 4R^2$, ceea ce conduce la $g = 3R$.

Datorită formulelor care dau volumul şi aria laterală, putem scrie:

$$h = \frac{3V}{R^2}; \; g = \frac{S}{R}.$$

Înlocuind în relaţia $g^2 = h^2 + R^2$ şi notînd $R^2 = x$, obţinem ecuaţia:

$$x^3 - S^2x + 9V^2 = 0. \qquad (8)$$

Pentru funcţia $f:(0; +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - S^2x + 9V^2$, putem întocmi următorul tabel:

x	0		$\frac{S}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$9V^2$	$\searrow$	$f\left(\frac{S}{\sqrt{3}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Rezultă că ecuaţia (8) are cel puţin o rădăcină reală $x > 0$, dacă şi numai dacă se verifică inegalitatea $f\left(\frac{S}{\sqrt{3}}\right) \leqslant 0$, echivalentă cu cea de a doua inegalitate din enunţ. Se deduce imediat că egalitatea are loc pentru $g = R\sqrt{3}$.

12) *Oricare ar fi numerele reale strict pozitive a şi b, $a \neq b$, se verifică inegalităţile:*

$$2 < \frac{2}{a+b}\left(\frac{a^a}{b^b}\right)^{\frac{1}{a-b}} < \mathrm{e},$$

e fiind numărul lui Euler.

Să observăm că inegalităţile din enunţ rămîn aceleaşi dacă schimbăm între ele numerele a şi b. Deci orice demonstraţie făcută pentru $0 < a < b$ îşi menţine valabilitatea şi pentru $0 < b < a$.

Presupunînd $0 < b < a$, prima inegalitate este echivalentă cu:

$$(a - b)\ln(a + b) - a \ln a + b \ln b < 0 \qquad (9)$$

Considerînd funcţia $g: [b; +\infty) \to \mathbf{R}$,

$$g(x) = (x - b)\ln(x + b) - x \ln x + b \ln b,$$

putem scrie, pentru orice $x \in [b; +\infty)$:

$$g'(x) = \ln(x + b) - \ln x - \frac{2b}{x+b}; \; g''(x) = \frac{b(x-b)}{x(x+b)^2}$$

În plus:

$$\lim_{x\to\infty} g'(x) = \lim_{x\to\infty}\left[\ln\frac{x+b}{x}\right] = 0. \qquad (9')$$

Deoarece $g''(x) > 0$, oricare ar fi $x \in (b; +\infty)$, deducem că g' este strict crescătoare pe $[b; +\infty)$ și avînd în vedere (9') rezultă $g'(x) < 0$.

Deci funcția g este strict descrescătoare pe $[b; +\infty)$ și cum $g(b) = 0$, deducem $g(x) < 0$ oricare ar fi $x \in (b; +\infty)$, ceea ce demonstrează inegalitatea (9).

A doua inegalitate din enunț este echivalentă cu:

$$(a-b)\ln\frac{e(a+b)}{2} - a\ln a + b\ln b > 0. \qquad (10)$$

Fie funcția $h: [b; +\infty) \to \mathbf{R}$,

$$h(x) = (x-b)\ln\frac{e(x+b)}{2} - x\ln x + b\ln b,$$

continuă și de două ori derivabilă pe domeniul ei de definiție.

Putem scrie:

$$h'(x) = \ln\frac{e(x+b)}{2} + \frac{x-b}{x+b} - \ln x - 1;\ h'(b) = 0;$$

$$h''(x) = \frac{b(x-b)}{x(x+b)^2}.$$

Rezultă $h''(x) > 0$, pentru orice $x \in (b; +\infty)$, ceea ce demonstrează că h' este strict crescătoare pe $[b; +\infty)$ și cum $h'(b) = 0$, rezultă $h'(x) > 0$, oricare ar fi $x \in [b; +\infty)$. Deci funcția h este strict crescătoare pe $[b; +\infty)$ și, avînd în vedere $h(b) = 0$, deducem $h(x) > 0$, oricare ar fi $x > b$, ceea ce demonstrează inegalitatea (10).

13) *Fie numerele reale $a < b < c$ și funcția $f: [a; c] \to \mathbf{R}$, continuă pe $[a; c]$ și de două ori derivabilă pe $(a; c)$. Notăm:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix}.$$

Dacă f este convexă (concavă) pe $[a; c]$ avem $\Delta \geqslant 0$ ($\Delta \leqslant 0$)

Pentru demonstrație să considerăm funcția $g: [a; c] \to \mathbf{R}$.

$$g(x) = f(x) + Mx^2 + Nx + P$$

şi să determinăm numerele reale M, N, P astfel încît $g(a) = g(b) = g(c) = 0$. Sîntem conduşi la sistemul compatibil determinat:

$$\begin{cases} Ma^2 + Na + P = -f(a), \\ Mb^2 + Nb + P = -f(b), \\ Mc^2 + Nc + P = -f(c), \end{cases}$$

de unde deducem:

$$M = -\left[\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}\right].$$

Deoarece $g(a) = g(b)$ şi $g(b) = g(c)$, rezultă că există $x_1 \in (a ; b)$ şi $x_2 \in (b ; c)$ astfel încît $g'(x_1) = g'(x_2) = 0$, de unde deducem existenţa numărului $x_0 \in (x_1 ; x_2)$ cu proprietatea $g''(x_0) = 0$, deci $f''(x_0) + 2M = 0$, sau $2M = -f''(x_0)$. Dacă f este convexă pe $[a ; c]$, avem $f''(x_0) \geqslant 0$, deci $M \leqslant 0$. Ultima inegalitate este echivalentă cu $\Delta \geqslant 0$. Raţionamentul este analog în cazul în care f este concavă pe $[a ; c]$.

14) *Oricare ar fi numărul real x, se verifică inegalităţile:*

$$\sqrt{x^2 - 6x + 10} + \sqrt{x^2 + 4} \geqslant 3\sqrt{2},$$

$$\left|\sqrt{x^2 - 6x + 10} - \sqrt{x^2 + 4}\right| \leqslant \sqrt{10}.$$

Dacă avem în vedere că putem scrie $X = \sqrt{(x-3)^2 + 1}$ şi $Y = \sqrt{x^2 + 2^2}$, rezultă că X poate fi interpretat ca fiind distanţa dintre punctele $M(x ; 0)$ şi $A(3 ; -1)$ sau $A'(3 ; 1)$, iar Y distanţa dintre acelaşi punct M şi unul din punctele $B(0 ; 2)$ sau $B'(0 ; -2)$ (vezi fig. nr. 3).

Putem scrie: $d(M ; A) + d(M ; B) \geqslant d(A ; B)$, cu egal dacă şi numai dacă punctul M coincide cu punctul M_0. Exprimînd distanţele, cu

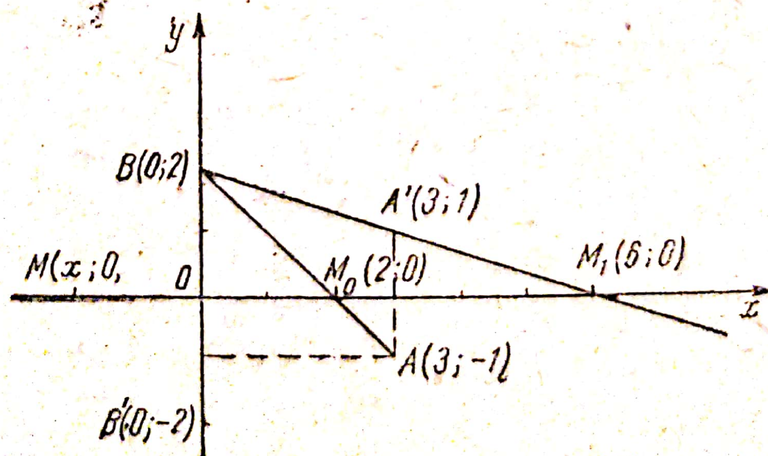


Fig. nr. 3

ajutorul coordonatelor punctelor considerate deducem inegalitatea $X + Y \geqslant 3\sqrt{2}$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$. Egalitatea avînd loc pentru $M = M_0$, deducem pentru acest caz $x = 2$.

În fine, avînd în vedere punctele A', B, M, deducem:

$$|\, d(M ;\ A') - d(M ;\ B)| \leqslant d(A' ;\ B)$$

cu egal dacă şi numai dacă punctul M coincide cu M_1. Procedînd ca mai înainte, deducem inegalitatea $|X - Y| \leqslant \sqrt{10}$, egalitatea verificîndu-se numai pentru $x = 6$.

15) *Oricare ar fi numerele a, b, c aparţinînd intervalului* $[0 ; 1]$, *se verifică inegalitatea:*

$$x + y + z < \frac{3}{2} + (xy + yz + zx).$$

Pentru demonstraţie să luăm punctele M, N, P, Q respectiv pe laturile $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DA|$ ale pătratului $ABCD$ avînd latura de lungime egală cu unitatea (vezi fig. nr. 4). În plus segmentele $|AM|$ şi $|CP|$ au aceeaşi lungime x, iar segmentele $|BN|$ şi $|DQ|$ au aceeaşi lungime y. Scriind că suma ariilor triunghiurilor AMQ, BNM, CPN, DQP, este mai mică decît aria pătratului, deducem inegalitatea:

$$x + y - 2xy < 1.$$

Să observăm că pentru $x = 1$, $y = 0$, sau $x = 0$, $y = 1$ se obţine $x + y - 2xy = 1$. Deci putem scrie:

$$x + y \leqslant 1 + 2xy,$$

oricare ar fi numerele x, y din $[0 ; 1]$.

Considerînd acum numerele x, y, z din $[0 ; 1]$ rezultă:

$$x + y \leqslant 1 + 2xy ; \quad y + z \leqslant 1 + 2yz, \quad z + x \leqslant 1 + 2zx, \qquad (11)$$

de unde deducem:

$$x + y + z < \frac{3}{2} + (xy + yz + zx). \qquad (11')$$

În inegalitatea (11') s-a exclus cazul de egalitate deoarece nu pot fi îndeplinite simultan condiţiile de egalitate din (11).

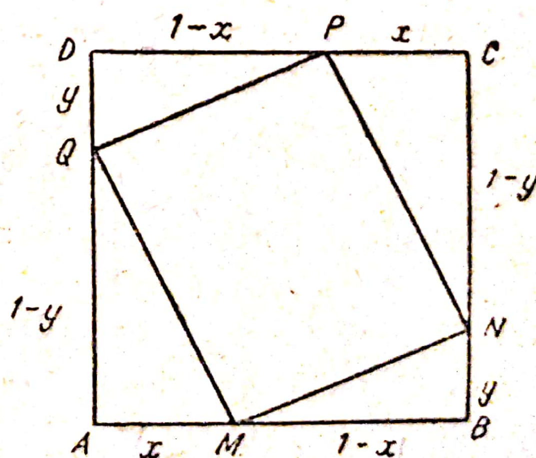


Fig. nr. 4

§ 5. INECUAȚII

În matematica din gimnaziu și liceu, inecuațiile au implicații vaste, motiv care impune ca elevii să-și însușească foarte bine tehnicile de rezolvare. Fondul de cunoștințe necesar pentru abordarea problemei trebuie să includă în mod obligatoriu:

— inegalități în mulțimea numerelor reale și proprietățile acestora;

— proprietăți legate de monotonia și variația semnelor pentru funcțiile elementare.

Ne îngăduim să subliniem unele probleme referitoare la tehnica rezolvării inecuațiilor.

a) O primă problemă este cea legată de *studiul funcțiilor definite prin relații de forma:*

$$F(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

unde $p, q \in \mathbf{R}[X]$.

Socotim necesar ca în primele exemple, ce se lucrează să se studieze semnul funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = (x - x_0)^n,\ n \in \mathbf{N}^*,\ x_0 \in \mathbf{R}$$

evidențiindu-se concluzia:

— dacă n este par: $f(x) > 0$, oricare ar fi $x \neq x_0$ și $f(x_0) = 0$;

— dacă n este impar: $f(x) < 0$, pentru $x < x_0$, $f(x) > 0$, pentru $x > x_0$ și $f(x_0) = 0$.

Fie acum funcția $F: E \to \mathbf{R}$,

$$F(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

cu $p, q \in \mathbf{R}[X]$ și unde E este mulțimea numerelor reale mai puțin mulțimea rădăcinilor reale ale polinomului q.

Convenim ca orice rădăcină reală a polinomului p, sau q, să fie numită zero respectiv pol al funcției F. Pe baza concluziei enunțate mai înainte, rezultă:

„În jurul unui zero sau pol de ordin impar (par) funcția F prezintă (nu prezintă) variație de semn".

Evident, această ultimă concluzie va fi întărită și printr-un exemplu prezentat în prealabil.

Ne exprimăm părerea că procedînd astfel, rezolvitorul realizează o economie de timp și în plus, eliminarea tabelelor de variație a semnului, cu mai multe linii, oferă mai puține posibilități de a greși.

Pentru a indica modul de lucru propus să rezolvăm inecuația:

$$F(x) = \frac{(x+3)(x^2+2x-3)}{(2-x)(x^2-2x+2)} \geqslant 0, \ x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}.$$

Deducem zerourile $x_1 = x_2 = -3$, $x_3 = 1$, polul $x_4 = 2$ și într-o primă etapă alcătuim următorul tabel:

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$F(x)$			0		0		|	−	

Am afirmat $F(x) < 0$, pentru $x > 2$, observînd că pentru valori foarte mari ale lui x obținem $F(x) < 0$.

În continuare tabelul se completează, marcînd variația de semn „în jurul" numerelor 2 și 1 menținînd același semn „în jurul" zeroului de ordin par -3.

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$F(x)$		−	0	−	0	+	|	−	

În fine putem scrie $F(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [1; 2)$.

b) O a doua problemă este legată de rezolvarea inecuațiilor în care intervin funcții iraționale, logaritmice, exponențiale etc. Pentru o mai bună ilustrare a celor ce dorim să recomandăm, prezentăm următoarele.

Exemple: 1) *Să se determine mulțimea tuturor numerelor reale x astfel încît:*

$$\frac{3+\sqrt{4-2x}}{x+2} > \frac{5}{2}.$$

Deducem pentru început $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2] = E$. Fie funcția $f: E \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{3+\sqrt{4-2x}}{x+2} - \frac{5}{2}$. Putem scrie:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{4-2x} = 5x + 4 \Rightarrow x(25x+48) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{48}{25}; 0\right\}.$$

Se obține $x = 0$, soluție pentru ecuația $f(x) = 0$. Putem întocmi următorul tabel de variație a semnului funcției f

x	$-\infty$		-2		0		2
$f(x)$		−	|	+	0	−	

Semnul funcției f, pentru fiecare din intervalele $(-\infty; -2)$, $(-2; 0)$, $(0; 2]$ a fost stabilit înlocuind, pe rînd, x cu cîte unul din numerele din aceste intervale.

Deci mulțimea numerelor $x \in \mathbf{R}$, pentru care se verifică inecuația din enunț este $(-2; 0)$.

2) *Să se rezolve inecuația:*

$$(1 - 2^{x+1})(x^2 - 1) < 0, \ x \in \mathbf{R}.$$

Observînd că avem $(1 - 2^{x+1})(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}$, putem alcătui următorul tabel:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$(1 - 2^{x+1})(x^2 - 1)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

Răspunsul este deci $x \in (1; +\infty)$.

În concluzie, dacă E este o reuniune de intervale ale axei reale, fie funcția continuă $f: E \to \mathbf{R}$ și una din inecuațiile $f(x) < 0$ sau $f(x) > 0$. Pentru rezolvarea inecuației propunem următorul mod de lucru:

— se rezolvă ecuația $f(x) = 0$;

— se stabilește semnul funcției $f(x)$ pe fiecare din subintervalele mulțimii E pe care $f(x) \neq 0$;

— se trag concluziile corespunzătoare pentru rezolvarea inecuației.

CUPRINS

Coli de tipar 10. B.T. 21.9.1983.
Format 16/61×86. Apărut 1983.

I. P. „Oltenia“ Craiova
Str. M. Viteazul, nr. 4
Republica Socialistă România

Plan 7241/171/1983

